

## Kombinatorika Megoldások

1) Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kellett érvényesíteni, amelyen egy  $3 \times 3$ -as négyzetben 1-9-ig szerepelnek a számok. (lásd 1. ábra) A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.

- a) Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások! (4 pont)
- b) Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk). Rajzolja be a szimmetriatengelyt! (3 pont)

Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, hogy a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz.

- c) Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága? (9 pont)

1.ábra

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2.ábra


### Megoldás:

- a) Minden sorban kell lyukasztásnak lenni. Az első sorban 3 lehetőségünk van a lyuk kiválasztására, a második sorban 2, ezek pedig egyértelműen meghatározzák a harmadik sort. (1 pont)
- A megfelelő lyukasztások száma:  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  (1 pont)
- A megoldások: (2 pont)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	3	6
7	5	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

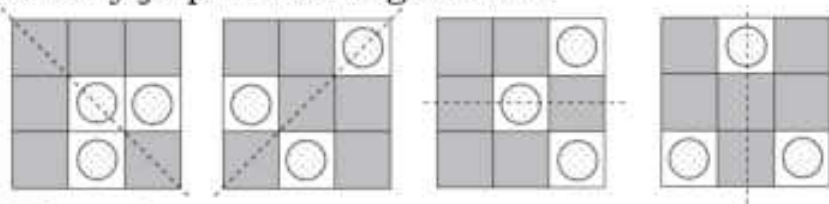
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- b) Néhány jó példa a megoldásra:



Helyes ábra

Szimmetriatengely berajzolása

- c) Lásd: Valószínűségszámítás 1 feladat

(2 pont)

(1 pont)

**Összesen: 16 pont**

2) Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

- a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel? (2 pont)

- b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott számok összege 10? (10 pont)

### Megoldás:

- a) Mivel a dobások során bármilyen helyen háromféle számot (0; 2; 4) dobhatunk, a rendezett számötösök száma  $3^5 = 243$  (2 pont)
- b) Ha a dobott pontok összegét tekintjük csak, és a dobások sorrendjét nem, akkor 10-et összegként háromféleképpen kaphatunk (1 pont)
1. eset:  $4 + 4 + 2 + 0 + 0 = 10$  (1 pont)
2. eset:  $4 + 2 + 2 + 2 + 0 = 10$  (1 pont)
3. eset:  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$  (1 pont)

Az 1. esetben ezt az 5 számot  $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ -féle sorrendben dobhattuk (2 pont)

A 2. esetben ezt az öt számot  $\frac{5!}{3!} = 20$ -féle sorrendben dobhattuk (2 pont)

A 3. esetben ezt az öt számot csak egyféle sorrendben dobhattuk. A 10-es összeg tehát összesen **51**-féleképpen állhatott elő. (2 pont)

**Összesen: 12 pont**

### 3) Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz.

a) Adja meg az  $A$  halmaz háromelemű részhalmazainak számát! (3 pont)

b) Az  $A$  halmaz elemeiből hány olyan öttel osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek? (6 pont)

c) Az  $A$  halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz? (7 pont)

### Megoldás:

- a) A 6-elemű halmaz 3-elemű részhalmazainak száma  $\binom{6}{3}$  (2 pont)

azaz **20** ilyen szám van (1 pont)

- b) Egy szám 5-tel osztható, ha nullára vagy ötre végződik (1 pont)

Nullára végződő hatjegyű számból  $5!$  van (1 pont)

Ötre végződő hatjegyű számból  $4 \cdot 4!$  van (2 pont)

Összesen  $5! + 4 \cdot 4! =$  (1 pont)

**216** ilyen szám van (1 pont)

- c) Komplementer halmaz segítségével számolható ki. (1 pont)

Az összes hatjegyű szám  $5 \cdot 6^5$  (2 pont)

Azok a hatjegyű számok, amelyekben nincs egyes:  $4 \cdot 5^5$  (2 pont)

Tehát  $5 \cdot 6^5 - 4 \cdot 5^5 =$  (1 pont)

**=26380** ilyen hatjegyű szám van (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

### 4) Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk? (5 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz! (9 pont)

### Megoldás:

- a) A kockák különbözőek, tehát az összes lehetséges eset  $6^6$  (2 pont)

Ha mindegyiknél más számot dobunk, akkor a hat különböző szám  $6!$ -féleképpen fordulhat elő. (2 pont)

Innen a klasszikus formula szerint a valószínűség  $\frac{6!}{6^6} = 0,0154$ . (1 pont)

b) A hat szám összege legalább 34, azt jelenti, hogy 34, 35 vagy 36 (1 pont)

Tehát a következő esetek lehetnek:

(1)  $36 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

(2)  $35 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5$

(3)  $34 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4$

(4)  $34 = 6 + 6 + 6 + 6 + 5 + 5$

(2 pont)

Összeszámoljuk, hogy az egyes esetek hányféleképpen fordulhatnak elő:

(1) egyféleképpen

(1 pont)

(2) 6-féleképpen

(3) 6-féleképpen

(1 pont)

(4)  $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen

(2 pont)

A kedvező esetek száma összesen:  $1 + 6 + 6 + 15 = 28$ .

(1 pont)

A keresett valószínűség:  $P = \frac{28}{6^6} \approx 0,0006$ .

(1 pont)

**Összesen: 14 pont**

5) **Hat úszó: A, B, C, D, E és F indul a 100 méteres pillangóúszás döntőjében. Egy fogadóirodában ennek a versenynek az első, a második és a harmadik helyezettjére lehet tippelni egy szelvényen. Az a fogadó szelvény érvényes, amelyen megnevezték az első, a második és a harmadik helyezettet. Ha a fogadó valamelyik helyezésre nem ír tippet, vagy a hat induló nevén kívül más nevet is beír, vagy egy nevet többször ír be, akkor a szelvénye érvénytelen. Holtverseny nincs, és nem is lehet rá fogadni.**

a) **Hány szelvényt kell kitöltenie annak, aki minden lehetséges esetre egy-egy érvényes fogadást akar kötni?** (3 pont)

**A döntő végeredménye a következő lett: első az A, második a B, harmadik a C versenyző.**

b) **Ha egy fogadó az összes lehetséges esetre egy-egy érvényes szelvényvel fogadott, akkor hány darab legalább egytalálatos szelvénye lett? (Egy szelvényen annyi találat van, ahány versenyző helyezése megegyezik a szelvényre írt tippel.)** (13 pont)

**Megoldás:**

a) Mivel bárki végezhet bármelyik dobogós helyen, ezért az első 6, a második 5, a harmadik helyezett 4-féle lehet, így  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ -féle dobogós sorrend lehetséges, tehát ennyi szelvényt kell kitöltenie (3 pont)

b) A telitalálatos szelvény tippje: ABC. Egyetlen szelvényen lett három találat (1 pont)

A pontosan 2 találatot elért szelvények tippje ABX, AXC vagy XBC alakú, ahol  $X \in \{D; E; F\}$ . Tehát 9 szelvényen lett pontosan 2 találat (3 pont)

Az egytalálatos szelvények számát keressük. Az első három helyezett bármelyikét eltalálhatta a fogadó, így először tegyük fel, hogy éppen az 1. helyezettet (A) találta el, de nem találta el sem a 2., sem a 3. helyezettet. Ez két lényegesen különböző módon valósulhatott meg.

1. eset: A második versenyzőre leadott tipp a C versenyző. A szelvényen szereplő tipp ACX alakú, ahol  $X \in \{B; D; E; F\}$ . Ez négy lehetőség, tehát 4 ilyen egytalálatos szelvény van (3 pont)

2. eset: A második helyezettre adott tipp nem a  $C$  versenyző (de nem is a  $B$  versenyző). A szelvényen szereplő tipp  $AXY$  alakú, ahol  $X \in \{D; E; F\}$ . Az  $X$  helyére beírandó név megválasztása után az  $Y$  helyére három név bármelyike választható, mert csak három név nem írható oda: az  $A$ , a  $C$  és az  $X$  helyére választott név. Ezért  $3 \cdot 3 = 9$  ilyen egytalálatos szelvény van (2 pont)

Tehát összesen  $4 + 9 = 13$  darab olyan egytalálatos szelvény van, ahol csak az első helyezettet ( $A$ ) találta el a fogadó (1 pont)

Hasonlóan okoskodva: 13 olyan szelvény lett, ahol csak a második helyezettet ( $B$ ), és 13 olyan szelvény, ahol csak a harmadik helyezettet ( $C$ ). Tehát összesen  $3 \cdot 13 = 39$  egytalálatos szelvénye lett a fogadónak (2 pont)

A legalább egytalálatos szelvények száma:  $1 + 9 + 39 = 49$  (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

- 6) Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18. Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót (azaz zöldet vagy kéket) húzunk,  $\frac{1}{15}$ -del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége, hogy kék vagy piros golyót húzunk  $\frac{11}{10}$ -szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Hány zöld és hány kék golyó van az urnában? (14 pont)

**Megoldás:**

Jelöljük  $z$ -vel a zöld golyók,  $k$ -val pedig a kék golyók számát (1 pont)

Ekkor az urnában lévő golyók száma:  $18 + z + k$  (1 pont)

Használjuk a valószínűség kombinatorikus kiszámítását megadó kedvező  
összes  
képletét (1 pont)

A feltételek szerint (1)  $\frac{z + k}{18 + z + k} + \frac{1}{15} = \frac{18 + z}{18 + z + k}$  (1 pont)

(2)  $\frac{k + 18}{18 + z + k} = \frac{1,1(z + 18)}{18 + z + k}$  (1 pont)

az (1)-es egyenletet átírva:  $15(z + k) + 18 + z + k = 15(18 + z)$  (1 pont)

majd rendezve: (3)  $16k + z = 252$  (1 pont)

a (2)-es egyenletet átírva:  $k + 18 = 1,1(z + 18)$  (1 pont)

rendezve: (4)  $k = 1,1z + 18$  (1 pont)

(4)-ből  $k$ -t (3)-ba helyettesítve:  $16(1,1z + 18) + z = 252$  (1 pont)

Innen  $z = 12$  (1 pont)

(4)-be visszahelyettesítve  $k = 15$  (1 pont)

A kapott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek (1 pont)

**Az urnában 12 darab zöld és 15 darab kék golyó van.** (1 pont)

**Összesen: 14 pont**

- 7) Annának az IWIW-en 40 ismerőse van (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismertséget kölcsönösnek tekintünk.)  
Anna ismerőseinek mindegyike Anna minden többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

- a) A szoba került 41 ember között összesen hány ismertség áll fenn? (5 pont)
- b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást? (5 pont)
- c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást? (6 pont)

**Megoldás:**

- a) *Lásd: Gráfelmélet 14. feladat*
- b) Vannak 40-en, akikből választhatunk (1 pont)  
 Az elsőnek választott személy bárki lehet (1 pont)  
 Utána 39-ből kell választani egyet (1 pont)  
 Mivel az előzőnek választott személy közülük egyet nem ismer, így 38-at ismer (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy ismerik egymást  $\frac{38}{39}$  (1 pont)

- c) A kiválasztott két személy közül vagy Anna az egyik, vagy mindkettő Anna ismerősei közül való (1 pont)

1. eset: Ha Anna az egyik kiválasztott  
 Ekkor a másik választásától függetlenül a két ember ismeri egymást. A kedvező esetek száma ekkor nulla (1 pont)

2. eset: Ha Anna ismerősei közül való a két választott  
 Akkor a 40 személy kettesével párba állítható, úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismerik egymást, ezért 20 kedvező eset van (1 pont)

Az összes lehetséges kiválasztások száma  $\binom{41}{2}$  (1 pont)

azaz 820 (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség  $P = \frac{0 + 20}{820} = \frac{1}{41} \approx 0,0244$  (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

- 8) Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent lévők közül.

- a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos golyókat nem különböztetjük meg egymástól? (4 pont)

- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó van? (4 pont)

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

- c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!) (8 pont)

**Megoldás:**

- a) A lehetséges húzási sorrendek száma megegyezik 2 piros és 3 fehér golyó különböző sorba rendezéseinek számával (2 pont)

A 2 piros és 3 fehér golyónak  $\binom{5}{2}$  különböző (1 pont)

azaz 10 sorba rendezése van. (1 pont)

- b) A már kihúzott 2 piros és 2 fehér golyó húzása  $\binom{4}{2}$  (2 pont)  
 azaz 6 különböző sorrendben történhetett (1 pont)  
 A lehetséges esetek száma 10, így a valószínűség  $P = \frac{6}{10} = 0,6$  (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 7. feladat*

**Összesen: 16 pont**

9) **Egy középiskola 12. osztályának egy csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontszámot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.**

a) **Legalább hányan lehettek a csoportban?** (5 pont)

b) **Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14?** (4 pont)

**A 14 fős csoportból Annának, Balázsnak, Csabának, Dorkának és Editnek lett 100 pontos a dolgozata. Pontosan hatan írtak 60 pontos dolgozatot, és csak egy olyan tanuló volt, akinek a pontszáma megegyezett az átlagpontszámmal.**

c) **Hányféleképpen valósulhatott ez meg? (A csoport két eredményét akkor tekintjük különbözőnek, ha a csoport legalább egy tanulójának különböző a dolgozatra kapott pontszáma a két esetben)** (7 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Szöveges feladatok 31. feladat*

b) *Lásd: Szöveges feladatok 31. feladat*

c) A 14 tanulónak összesen 1064 pontja volt. Ebből ismert az  $5 + 6 + 1 = 12$  tanuló  $5 \cdot 100 + 6 \cdot 60 + 76 = 936$  pontja. A fennmaradó 128 ponton két tanuló osztozott úgy, hogy ebből a 128 pontból mindketten kaptak legalább 61 pontot. (1 pont)

A lehetőségek:  $61 + 67$ , ez 2 lehetőség;  $62 + 66$ , ez 2 lehetőség (1 pont)

$63 + 65$ , ez 2 lehetőség;  $64 + 64$ , ez 1 lehetőség (1 pont)

A két tanuló dolgozatának pontszáma  $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ -féleképpen alakulhatott (1 pont)

Mivel a nem maximális pontszámot elérő 9 tanulóból a 60 pontot elérő 6

tanuló kiválasztására  $\binom{9}{6} = 84$  lehetőség van (1 pont)

és a maradék 3 tanulóból 3-féleképpen választható ki a 76 pontos (1 pont)

ezért az összes lehetőségek száma:  $84 \cdot 3 \cdot 7 = 1764$  (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

10) **A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztnéve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.**

**A család tagjairól tudjuk:**

- csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;
- egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem
- Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.

a) **A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?** (5 pont)

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szült.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnévük közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

### Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 3. feladat*

b) A háromjegyű szám minden számjegye 5 vagy 6 lehet csak (1 pont)

Minden számjegy kétféleképpen választható meg, tehát  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  ilyen háromjegyű szám van (1 pont)

**Mivel a társaság minden tagja különböző számot mondott, így legfeljebb 8 tagú lehet a társaság** (1 pont)

c) A feladat szerint Barbara, Bea, Bori és Balázs vagy az 1,3,5 és 7-es számú székeken, vagy a 2,4,6 és 8-as számú székeken foglalnak helyet, és mindkét esetben a maradék 4 helyre a 4 barát ül. (1 pont)

Az első sorrendben az adott 4 helyre Barbara, Bea, Bori és Balázs 4!-féleképpen helyezkedhet el (1 pont)

Barbara, Bea, Bori és Balázs bármelyik elhelyezkedése esetén a maradék 4 helyre a 4 barát szintén 4!-féleképpen foglalhat helyet (1 pont)

Így az első esetben a 8 embernek  $4! \cdot 4! = 576$ -féle ülésrendje alakulhat ki (1 pont)

A második esetben is ugyanennyi, ezért a 8 embernek összesen  $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$  ülésrendje alakulhat ki (1 pont)

d) A 8 ember összes ülésrendjének száma  $8! = 40320$  (1 pont)

Mivel bármilyen ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség

$$P = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1152}{40320} = \frac{1}{35} \approx 0,0286 \quad (2 \text{ pont})$$

**Összesen: 16 pont**

11) Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön? (5 pont)

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

(11 pont)

**Megoldás:**

a) Ha a 8 fős társaság minden tagja mindenkivel beszélt volna, akkor  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

beszélgetést folytattak volna le csütörtökön (2 pont)

Azonos nemzetiségűek nem beszéltek egymással, tehát a három német összesen 3-mal kevesebb, (1 pont)

míg a négy magyar meghívott összesen  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ -tal kevesebb beszélgetést

folytatott (1 pont)

Ezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma  $28 - (3 + 6) = 19$  (1 pont)

a) *Lásd: Valószínűségi számítás 9. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**12) Kilenc számkártya fekszik az asztalon.**



a) Rakja négy csoportba a kilenc számkártyát úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála kisebb osztója! Adjon meg egy lehetséges csoportosítást! (4 pont)

b) Berci körbe rakta a kilenc számkártyát egy nagy papírra, és ha két szám között legalább kettő volt a különbség, akkor a két kártyát összekötötte egy vonallal. Összesen hány vonalat rajzolt meg ily módon Berci? (4 pont)

Csaba az első hat kártya felhasználásával (1;2;3;4;5;6) két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: „415; 362.”)

A hat számból több ilyen duót lehet képezni Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a „415 ; 362” és a „362 ; 415” duó egyenlők, de a „362 ; 145” már egy másik duó.

c) Hány különböző duót lehet a hat számkártyából elkészíteni? (5 pont)

**Megoldás:**

a) Az 1, a 2, a 4 és a 8 külön csoportba kell, hogy kerüljön (1 pont)

Az 1-es mellett nem lehet más szám (1 pont)

Egy lehetséges beosztás: (1), (2;3), (4;5;6;7), (8;9) (1 pont)

egy másik: (1), (2;3;5), (4;6;7), (8;9) (1 pont)



- b) Berci minden számot összekötött minden számmal (1 pont)  
 kivéve a szomszédos számokat: 1-2, 2-3, 3-4,...8-9 (Egy 9 csúcsú teljes gráf  
 éleiből hagyunk egy 8-at) (1 pont)
- $$\binom{9}{2} - 8 = \quad (1 \text{ pont})$$
- Ez éppen megegyezik egy 9 csúcsú teljes gráf éleire vonatkozó képletével  
 $\left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right) \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} - 8 = \mathbf{28}$  vonalat húzott Berci (1 pont)
- Szintén jó megközelítés, ha a feladatot egy kilencszögnek tekintjük, mely  
 sokszög összes átlójára, plusz egy élére vagyunk kíváncsiak!
- c) Az egyik hármast kiválaszthatjuk  $\binom{6}{3}$ -féle módon, ezzel a második hármast  
 meghatározott (1 pont)  
 minden hármastól 3!-féle számot képezhetünk (1 pont)
- Összesen  $\binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 3! (= 720)$  duót képezhetünk (1 pont)
- Így minden esetet kétszer számoltunk (1 pont)  
**tehát 360-féle duó van** (1 pont)
- Egy másik megközelítéssel tekinthetjük a két duót egy darab hatjegyű  
 számnak is, melyet 6!-féleképpen tudunk sorba rendezni. Mivel ekkor minden  
 duó kétszer szerepel, pusztán el kell osztanunk kettővel!

**Összesen: 13 pont**

- 13) a) **Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és  
 Daninak és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a  
 nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük  
 hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül  
 rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.**
- i. **Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a  
 fényképet, amelyen a saját neve szerepel?** (3 pont)
- ii. **Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:**  
 - **senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt  
 vagy**  
 - **pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve  
 szerepel?** (8 pont)
- b) **Egy szabályos érme egyik oldalán 6-os, a másikon pedig 4-es  
 számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a  
 dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg  
 gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?**  
 (5 pont)

**Megoldás:**

- a) Jelöljük a fényképekre írt neveket  $A, B, C, D$ -vel, a neveknek megfelelő  
 borítékon lévő címzéseket  $a, b, c, d$ -vel.
- a1) Andris kapott csak megfelelő fényképet. Ez csakis úgy lehetséges, ha az  
 $abcd$  sorrendben elhelyezett borítékokba az  $ACDB$  vagy  $ADBC$  sorrendben  
 kerültek a képek. (2 pont)  
 Tehát a kívánt elhelyezés **kétféleképpen** valósítható meg. (1 pont)
- a2) Jelölte  $S$  azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott  
 fényképet. Az  $S$  esemény pontosan akkor következik be, ha az  $abcd$

sorrendben elhelyezett borítékokba  $BADC$ ,  $BCDA$ ,  $BDAC$ ,  $CADB$ ,  $CDAB$ ,  $CDBA$ ,  $DABC$ ,  $DCAB$ ,  $DCBA$  sorrendben kerülhettek fényképek. Ez 9 kedvező eset (3 pont)

Jelölje  $E$  azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet. Az  $E$  esemény pontosan akkor következik be, ha az  $abcd$  sorrendben elhelyezett borítékokba  $ACDB$ ,  $ADBC$ ,  $BCAD$ ,  $BDCA$ ,  $CABD$ ,  $CBDA$ ,  $DACB$ ,  $DBAC$  sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 8 kedvező eset (3 pont)

A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezéseknek azonos a valószínűsége. (1 pont)

$$\frac{9}{24} = P(S) > P(E) = \frac{8}{24} \quad (1 \text{ pont})$$

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 10. feladat*

**Összesen: 16 pont**

14) a) **Hány olyan tízjegyű pozitív szám van, amelynek minden számjegye a  $\{0; 8\}$  halmaz eleme?** (3 pont)

b) **Írja fel 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza!** (7 pont)

**Megoldás:**

a) A legnagyobb helyi értékű szám csak a 8-as lehet (1 pont)

A többi 9 helyi érték mindegyikénél két lehetőségünk van (1 pont)

Így  $2^9 = 512$  ilyen tízjegyű szám képezhető (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 7. feladat*

**Összesen: 10 pont**

15) a) **Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10; 20; 50; 100 és 200 forintos érmékkel), és pontosan kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethetett Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett. (A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe)** (4 pont)

A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvényvel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvényvel.

b) **Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha  $P$  annak a valószínűsége ( $0 < P < 1$ ), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz?** (4 pont)

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvényvel játszik.

c) **Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényen?** (4 pont)

d) **A telitalálat szempontjából a b) és c)-ben leírtak közül melyik éri meg Bandi számára?** (4 pont)

**Megoldás:**

a) Miki **kétféleképpen** fizethetett:

$$240 = 200 + 20 + 10 + 10 = 100 + 100 + 20 + 20 \quad (2 \text{ pont})$$

Karcsi **négyféleképpen** fizethetett:

$$240 = 200 + 20 + 10 + 5 + 5 = 200 + 10 + 10 + 10 + 10 \quad (1 \text{ pont})$$

$$240 = 100 + 100 + 20 + 10 + 10 = 100 + 50 + 50 + 20 + 20 \quad (1 \text{ pont})$$

- b) *Lásd: Valószínűségszámítás 11. feladat*  
 c) *Lásd: Valószínűségszámítás 11. feladat*  
 d) *Lásd: Valószínűségszámítás 11. feladat*

**Összesen: 16 pont**

- 16) Hatjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen hatjegyű számjegy képezhető? (11 pont)**

**Megoldás:**

Egy a feltételeknek megfelelő példa (1 pont)

A feltételeknek a következő esetek felelnek meg:

1. eset: 6 darab 6-os jegy: 1 darab hatjegyű szám (1 pont)

2. eset 5 darab 5-ös, 1 darab 1-es (1 pont)

6 ilyen szám van (1 pont)

3. eset 4 darab 4-es, 2 darab 2-es jegy (1 pont)

Ezekből a számjegyekből  $\binom{6}{4}$  (1 pont)

azaz 15 szám képezhető (1 pont)

4. eset 3 darab 3-as, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy (1 pont)

Ebben az esetben  $\frac{6!}{3! \cdot 2!} =$  (1 pont)

=60 megfelelő szám van (1 pont)

(Más eset nincs,) tehát összesen **82**, a feltételeknek megfelelő hatjegyű szám képezhető (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

- 17) Öt egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.**

a) **Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, a másikban nem.) (4 pont)**

b) **Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggőben legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól? (12 pont)**

**Megoldás:**

a) Az öt tanyát tekintsük egy gráf csúcsainak. Két csúcsot éllel kötünk össze, ha van az általuk reprezentált tanyák között kábel-összeköttetés (1 pont)

Egy ötpontú egyszerű gráfban legfeljebb 10 él húzható, ezek mindegyike vagy szerepel a gráfban, vagy nem (1 pont)

Így minden élhez két értéket rendelhetünk (1 pont)

A különböző hálózatok száma ezért  $2^{10} = \mathbf{1024}$  (1 pont)

b) A csúcsokat nem megkülönböztetve három eset lehetséges (1 pont)

I. Egy csúcsot összekötünk négy másikkal (1 pont)

II. A csúcsokat egymás után sorba kötjük (1 pont)

III. Egy csúcstól három másikkal, ez utóbbiak közül pedig egyet az ötödikkal kötünk össze (1 pont)

Ha a csúcstól megkülönböztetjük egymástól, akkor az I. esetben azt 5-féleképpen tehetjük meg. (1 pont)

A II. esetben  $5! = 120$ -féleképpen rakhatjuk az 5 tanyát sorba (1 pont)

de így minden lehetőséget kétszer számolunk, azaz csak 60 különböző összeköttetés lehetséges (1 pont)

A III. esetben a 3 fokszámú csúcstól az 5, a 2 fokszámú csúcstól 4-féleképpen, az ehhez kapcsolódó 1 fokszámú csúcstól 3-féleképpen választhatjuk. (2 pont)

így a lehetőségek száma  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  (2 pont)

Ez összesen  $5 + 60 + 60 = 125$  különböző hálózatot jelent (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**18) Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az A, B, C, D, E és F osztály egy-egy csapattal vett részt.**

a) **Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az A és a B osztály végzett az első két helyen, a D osztály pedig nem lett utolsó?** (4 pont)

b) **Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az E osztály megelőzte az F osztályt?**

**A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje A, B, C, D, E, F lett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett B osztály legyőzte a bajnok A osztályt.** (4 pont)

c) **Mutassa meg, hogy a B és a D osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött!** (8 pont)

**Megoldás:**

a) Az A, B sorrendje az első két helyen kétféleképp alakulhatott (1 pont)

A D osztály a 3., 4. és 5. helyeken végezhetett, ez 3 lehetőség (1 pont)

A C, E, F osztályok a fennmaradó három helyen  $3!$ -féle sorrendben végezhettek (1 pont)

A különböző lehetőségek száma tehát  $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$  (1 pont)

b) Az összes eset felében az E osztály megelőzi F-et, a másik felében pedig F előzi meg E-t. (2 pont)

A megfelelő esetek száma tehát  $\frac{6!}{2} = 360$  (2 pont)

c) Az A csapat a B ellen vesztett, a többi mérkőzését megnyerte (nincs döntetlenje) (1 pont)

Az F-nek nincs egyetlen pontja, így ők nem érhetek el döntetlent (1 pont)

A, B, C, D, E csapatok egymás ellen összesen 6 mérkőzést játszottak (1 pont)

ebből 5 mérkőzés végződött döntetlenre (1 pont)

A B csapat a C, D, E elleni 3 mérkőzésből 3 pontot szerzett, tehát vagy 1 győzelme 1 döntetlenje és 1 veresége, vagy 2 döntetlenje van (2 pont)

Ha 1 győzelme és 1 veresége lenne B-nek, akkor a B, C, D, E csapatok egymás elleni 6 mérkőzéséből legfeljebb 4 végződhetett volna döntetlennel (1 pont)

Ez nem lehetséges, tehát **B minden mérkőzése, így a D elleni is döntetlennel zárult** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

19) Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a tenispályára, mindegyik fiú kezét fog a többiekkel.

a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt? (3 pont)  
Legutóbb Dani és Ernő együtt érkeztek a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek.

b) Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal? (3 pont)

c) A fiúk mindig páros mérkőzést játszanak, kettő-kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.)

Hány különböző mérkőzés lehetséges? (6 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Gráfelmélet 9. feladat

b) Mivel Dani és Ernő együtt érkezett, ezért négy különböző időpontban érkezhettek. A lehetséges érkezési sorrendek száma  $4! = 24$  (3 pont)

c) Minden mérkőzés során egy fiú pihen, ezért a pályán lévő négy játékosra 5 lehetőség van. (1 pont)

A pályán lévő négy fiúból kettő kiválasztására  $\binom{4}{2} = 6$  lehetőség van (2 pont)

Viszont ekkor minden mérkőzést kétszer számoltunk, így a rögzített pihenő fiú esetén három különböző teniszparti lehetséges (2 pont)

Így a különböző lehetséges páros mérkőzések száma  $5 \cdot 3 = 15$  (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

20) A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

<b>Érdemjegy</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>Tanulók száma</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>2</b>

a) Ábrázolják az eredmények eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)

b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)

d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (8 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Statisztika 6. feladat

b) Lásd: Statisztika 6. feladat

c) Lásd: Valószínűségszámítás 18. feladat

d) Az osztályból 2 tanuló kiválasztására  $\binom{30}{2} = 435$  lehetőségünk van. (2 pont)

A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: (1;2), (1;5), (2;4), (3;3), (4;5) (2 pont)

A kedvező esetek száma:  $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 8 \cdot 7 + \binom{9}{2} + 7 \cdot 4 = 144$  (2 pont)

A keresett valószínűség  $P = \frac{144}{435} = \frac{48}{145} \approx 0,33$  (2 pont)

**Összesen: 16 pont**

21) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

- a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)  
b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)  
c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

**Megoldás:**

- a)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  darab ilyen ötjegyű számot képezhetünk (2 pont)  
b) Lásd: Számelmélet 1. feladat  
c) Lásd: Számelmélet 1. feladat

**Összesen: 12 pont**

22) A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfelén” elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges párosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

- a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll. (5 pont)  
b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén” lévő pöttyök számának összege 8? (3 pont)  
c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük”, amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.) (8 pont)

**Megoldás:**

- a) Nyolc olyan dominó van, amelynek mind a két térfelén ugyanannyi a pöttyök száma. (2 pont)

Az olyan dominók száma, amelyeknek a két térfelén különböző számú pötty áll, annyi van, ahányféleképpen kiválasztható két szám a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül, a sorrendet nem véve figyelembe, tehát  $\frac{8 \cdot 7}{2}$ , azaz 28-féleképpen (2 pont)

**tehát összesen  $8 + 28 = 36$  kőből álló a dominókészlet** (1 pont)

- b) Lásd: Valószínűségszámítás 20. feladat

- c) 8 olyan dominó van, amelynek egyik térfelén nincs tipp. Ezek közül 2 db  $\binom{8}{2}$ -féleképpen választható ki (2 pont)

A 8 olyan dominó közül, amelyeknek egyik térfelén 1 db pötty van  $\binom{8}{2}$ -féleképpen választható ki 2 db. Ezt a gondolatmenetet folytatva  $\binom{8}{2}$ -féleképpen választható ki 2 db azon 8 dominó közül, amelyeknek az egyik térfelén 7 pötty van (2 pont)

A kedvező esetek száma  $8 \cdot \binom{8}{2}$  (1 pont)

Az összes esetek száma  $\binom{36}{2}$  (1 pont)

A keresett valószínűség  $\frac{8 \cdot \binom{8}{2}}{\binom{36}{2}} = \frac{16}{45}$  (2 pont)

**Összesen: 16 pont**

**23) Adott két párhuzamos egyenes,  $e$  és  $f$ . Kijelölünk  $e$ -n 5,  $f$ -en pedig 4 különböző pontot.**

- a) **Hány ( $e$ -től és  $f$ -től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? (11 pont)**
- b) **A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az  $e$  egyenes 5 pontja is azonos színű és az  $f$  egyenes 4 pontja is azonos színű lesz? (5 pont)**

**Megoldás:**

a) Az  $e$  egyenesen kijelölt 5 pont bármelyikét az  $f$  egyenesen kijelölt 4 pont bármelyikével összekötve megfelelő egyenest kapunk (1 pont)

Így a megadott feltételnek megfelelően az egyenesek száma  $5 \cdot 4 = 20$  (1 pont)

Az adott feltételnek megfelelő háromszög két csúcsa az egyik, harmadik csúcsa a másik egyenesen van. (1 pont)

Ha az  $e$  egyenesen a háromszögnek két csúcsa van, akkor az a két csúcs

$\binom{5}{2}$ -féleképpen választható ki (1 pont)

Így az ilyen háromszögek száma 30 (1 pont)

A megfelelő háromszögek száma tehát 70 (1 pont)

Az adott feltételnek megfelelő négyszögek két csúcsa az  $e$ , két csúcsa az  $f$  egyenesen van. (1 pont)

Az  $e$  egyenesen két pontot  $\binom{5}{2}$ , az  $f$  egyenesen két pontot  $\binom{4}{2}$  különböző

módon lehet kiválasztani (2 pont)

Így a megfelelő négyszögek száma  $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$  (2 pont)

b) Az egyenlően valószínű színezések száma:  $2^9$  (2 pont)

Az  $e$  egyenesen és az  $f$  egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont (1 pont)

Tehát 4 kedvező eset van (1 pont)

A kért valószínűség így:  $\frac{4}{2^9} = 0,0078$  (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**24)**

a) **A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)**

- **Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.**
- **Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.**

- b) Az  $A, B, C, D$  és  $E$  pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az  $A, B, C, D, E$  pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Gráfelmélet 2. feladat*

b) Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. (2 pont)

Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne. (2 pont)

Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. (2 pont)

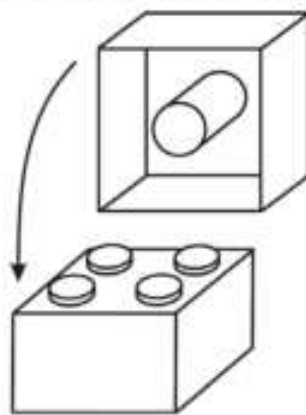
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van (1 pont)

Ezek közül  $\binom{10}{6}$  féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. (2 pont)

A keresett valószínűség tehát  $P = \frac{5}{210} \approx 0,024$  (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

- 25) Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

b) Hányféle különböző színösszeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.

Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: „0,01-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.”

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Térgeometria 17. feladat*

b) A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet (1 pont)

Ha a piros elemek száma  $k$ , akkor az építhető tornyok száma  $\binom{8}{k}$  (1 pont)



Így az ilyen tornyok száma összesen:

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = (56 + 28 + 8 + 1) = \mathbf{93} \quad (2 \text{ pont})$$

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes

$$\frac{1000000 - 20}{1000000} = 0,99998 \quad (1 \text{ pont})$$

Annak a valószínűsége, hogy egy  $n$  kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes  $0,99998^n$  (1 pont)

Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes kisebb  $0,01$ -nél, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább  $0,99$

(1 pont)

Megoldandó a  $0,99998^n \geq 0,99 \quad (n \in \mathbb{N})$  (1 pont)

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt

$$n \cdot \lg 0,99998 \geq \lg 0,99 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ebből } n \leq \frac{\lg 0,99}{\lg 0,99998} \approx 502,5 \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát András legfeljebb **502 darabos** készletet vehetett (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**26) Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.**

a) **Visszatevés nélkül kihúzzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű?** (4 pont)

b) **Ha úgy húzzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzzunk?** (4 pont)

c) **A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal?** (8 pont)

**Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!**

**Megoldás:**

a) Az összes kihúzási lehetőségek száma  $\binom{17}{3}$  (1 pont)

Három sárga golyót  $\binom{8}{3}$  féleképpen, három zöldet pedig  $\binom{9}{3}$  féleképpen húzhatunk ki (1 pont)

A kedvező esetek száma így  $\binom{8}{3} + \binom{9}{3}$  (1 pont)

A keresett valószínűség  $\frac{\binom{8}{3} + \binom{9}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{7}{34} \approx \mathbf{0,206}$  (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 26. feladat*

- c) A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, vagy 3-as maradékaik páronként különbözik (2 pont)  
 0 maradékot a 3; 6; 9; 12; 15 számok adnak, közülük három szám húzása a következő képen lehetséges:  $\binom{5}{3}$  (1 pont)
- 1 maradékot adnak az 1; 4; 7; 10; 13; 16 számok, itt  $\binom{6}{3}$  féleképpen lehetséges, mint a 2 maradékot adó 2; 5; 8; 11; 14; 17 esetében (2 pont)
- A páronként különböző maradékot adó húzások száma  $5 \cdot 6^2$  (1 pont)
- A kedvező esetek száma  $\binom{5}{3} + 2 \cdot \binom{6}{3} + 5 \cdot 6^2$  (1 pont)
- Mivel az összes esetek száma  $\binom{17}{3}$ , ezért a keresett valószínűség:
- $$P = \frac{230}{680} \approx \mathbf{0,338}$$
- (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

- 27) Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre A, B, C, D és E.**
- a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak? (4 pont)
- b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén A-ból C-be, ha a B, D, és E pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az A pontot csak az út kezdetén, a C pontot csak az út végén érinthetjük.) (4 pont)
- c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (8 pont)

**Megoldás:**

- a) Akkor kapunk négy megfelelő húrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. A körüljárási iránynak megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik. (1 pont)  
 Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért a kedvező esetek száma 5. (1 pont)
- Az összes eset száma:  $\binom{10}{4}$ . (1 pont)
- A keresett valószínűség:  $P = \frac{5}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42} (\approx \mathbf{0,024})$ . (1 pont)
- b) Ha mindhárom pontot érintjük, akkor  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  lehetőség van. (1 pont)  
 Ha csak két ponton megyünk át, akkor a lehetőségek száma  $3 \cdot 2 = 6$ . (1 pont)  
 Ha csak egy ponton megyünk át, akkor 3 lehetőség van, de közvetlenül is átmehetünk A-ból C-be, ez még 1 eset. (1 pont)
- Az összes lehetséges útvonalak száma tehát:  $6 + 6 + 3 + 1 = \mathbf{16}$ . (1 pont)

- c) Az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, amikor csak 2 vagy 1 szín szerepel. (1 pont)  
 Mindegyik húrt háromféle színre festhetjük, ezért az összes lehetőség száma  $3^{10}$  ( $= 59049$ ). (1 pont)  
 Ha két színt használunk a háromból, akkor az adott két szín segítségével mindegyik húrt kétféleképpen színezzük ki, a tíz húrt pedig  $2^{10}$ -féleképpen. (1 pont)  
 De ebbe beleszámoltuk azt az esetet is, amikor csak egyetlen színt használunk, ezért a fenti értéket 2-vel csökkenteni kell:  $2^{10} - 2$ . (1 pont)  
 A megadott 3 színből kettőt 3-féleképpen választhatunk ki, így a pontosan két színt használó színezések száma  $3 \cdot (2^{10} - 2)$  ( $= 3066$ ). (1 pont)  
 Pontosán egy színnel 3-féleképpen színezzük ki a húrokat. (1 pont)  
 Tehát a lehetséges színezések száma:  $3^{10} - [3 \cdot (2^{10} - 2)] - 3 = \mathbf{55980}$  (2 pont)  
 (Szintén jó megoldás, hogyha összeszámoljuk az eseteket aszerint, hogy az egyes színekkel hány húrt színezzük ki.)

**Összesen: 16 pont**

28)

- a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe  $2025 \text{ cm}^2$ ? (7 pont)
- b) Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van? (5 pont)

**Megoldás:**

- a) Lásd: Síkgeometria 20. feladat
- b) 12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók. (1 pont)  
 Mivel  $1+2+3+4+5+6=21$ , ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal. (1 pont)  
 Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12; 16; 24; 32; 36; 52; 56 vagy 64. (1 pont)  
 Mindegyik végződés  $4!$ , azaz 24 darab hatjegyű szám esetében fordul elő. (1 pont)  
 Emiatt a vizsgált számok között  $8 \cdot 24 = \mathbf{192}$  darab 12-vel osztható van. (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

29) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

- a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő! (4 pont)  
 András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.
- b) Hány éves András? (6 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek.

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön? (6 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Sorozatok 20. feladat

b) Ha Barbara  $x$  éves, akkor Cili  $x+3$  éves, és így Dezső, Barbara és Edit életkora rendre  $x-6$ ,  $x$ , illetve  $x+12$  év. (1 pont)

Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három szomszédos tagja, ezért:

$$(x-6)(x+12) = x^2. \quad (1 \text{ pont})$$

A zárójeleket felbontva:

$$x^2 + 6x - 72 = x^2, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{ahonnan } x = 12. \quad (1 \text{ pont})$$

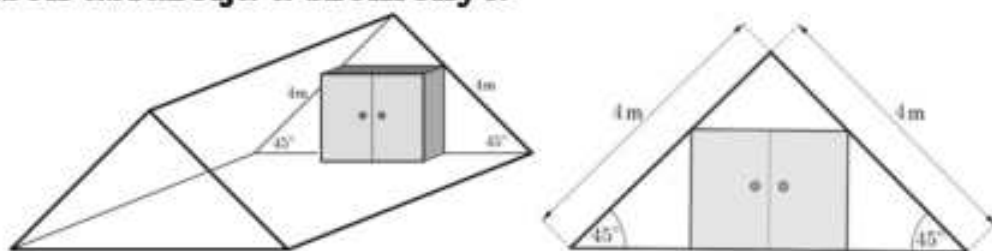
Ellenőrzés: Dezső, Barbara és Edit életkora 6, 12, illetve 24 év, ez a három szám pedig valóban egy mértani sorozat három szomszédos tagja. (1 pont)

**András tehát 9 éves.** (1 pont)

c) Lásd: Szöveges feladatok 32. feladat

**Összesen: 16 pont**

30) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készített. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig előlnézetben ábrázolja a szekrényt.



A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Térgeometria 22. feladat

b) Az azonos színű ingeket megkülönböztetve az első három napon  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  különböző lehetőség van a három ing kiválasztására. (1 pont)

Kedvező esemény az, ha valamilyen sorrendben mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr. (1 pont)

Egy adott színsorrendben  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$  különböző módon lehet három inget kiválasztani. (1 pont)

Három adott szín sorrendje  $3!$ -féle lehet, tehát három különböző színű inget  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! = 72$  különböző módon választhat ki Kovács úr. (2 pont)

A három sárga inget  $3!$  különböző sorrendben választhatja ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! + 3! = 78. \quad (1 \text{ pont})$$

A kért valószínűség tehát:

$$\frac{78}{210} = \frac{13}{35} \approx 0,371. \quad (1 \text{ pont})$$

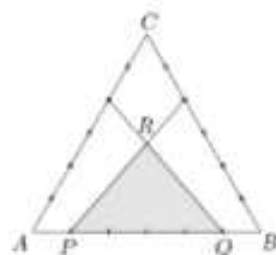
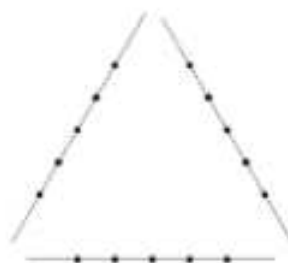
**Összesen: 16 pont**

**31) Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.**

a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül? (6 pont)

Az egyenlő oldalú  $ABC$  háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a  $PQR$  háromszöget.

b) Számítsa ki a  $PQR$  háromszög területének pontos értékét! (10 pont)



**Megoldás:**

a) A megadott 15 pont összesen  $\binom{15}{2}$  szakaszt határoz meg. (2 pont)

Egy-egy megadott egyenesen a nem megfelelő szakaszok száma 6, (2 pont)  
tehát összesen 18 nem megfelelő szakasz van. (1 pont)

A megfelelő szakaszok száma  $\binom{15}{2} - 18 = 87$  (1 pont)

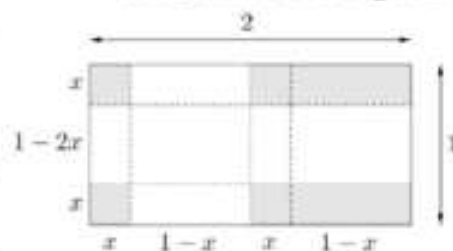
b) *Lásd: Síkgeometria 21. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**32) Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglalast alakú doboz hálózatát egy 2 méter  $\times$  1 méteres téglalapról vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagvesztéssel.)**

a) **Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!(11 pont)**

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).



**b) Hány különböző kód lehetséges?**

**(5 pont)**

**Megoldás:**

a) *Lásd: Függvények - Analízis 24. feladat*

b) Az ötkarakteres kódban  $\binom{5}{2} - 4 (= 6)$  különböző módon lehet két számjegy

helyét kijelölni. (2 pont)

A két helyre  $10 \cdot 10 (= 100)$  különböző módon lehet két számjegyet választani úgy, hogy a sorrendjük is számít, (1 pont)

a másik három helyre pedig  $26^3 (= 17576)$  különböző módon három nagybetűt. (1 pont)

**A különböző kódok száma tehát  $(6 \cdot 100 \cdot 17576 =) 10545600$ .** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**33) Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.**

**a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását!** (6 pont)

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes” eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

**b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség”) a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el?** (4 pont)

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdja mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es, és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

**c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól?** (3 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Statisztika 10. feladat*

b) *Lásd: Szöveges feladatok 14. feladat*

c) Megmaradt 1 darab M-es, 2 darab L-es és 4 darab XL-es zakó. (1 pont)

Ezek lehetséges sorrendjeinek száma  $\frac{7!}{2! \cdot 4!} =$  (1 pont)

**=105.** (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

34)

a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha  $a, b, c, d$  pozitív számok, és  $a + c = b + d$ , akkor az  $a, b, c, d$  hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

### Megoldás:

a) Lásd: Síkgeometria 23. feladat

b) Lásd: Síkgeometria 23. feladat

c) A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. (1 pont)

A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az  $(1; 11), (2; 10), (3; 9), (4; 8), (5; 7), (6; 6)$  számpárok valamelyike. (2 pont)

Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő (sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk. (1 pont)

Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg. (1 pont)

Az összes különböző lehetőségek száma tehát  $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} =$  (1 pont)

$=21.$  (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

35) Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszélet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező  $y = 4 - x^2$  egyenletű parabola, valamint az  $x$  tengely határolja a parabolaszéletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete  $x^2 + y^2 - 2,6y = 0$ .



a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszélet területének? A választ egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak?

(6 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Függvények – Analízis 27. feladat

b) A lejátszott mérkőzések:  $\binom{18}{2} = 153$ . (1 pont)

A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek. (1 pont)

ez  $\binom{8}{2} (= 28)$  győzelmet jelent. (1 pont)

Ha a Zöld Iskola tanulói  $x$  mérkőzést nyertek a Piros Iskola tanulói ellen, akkor megnyert mérkőzéseik száma összesen  $x + 28$ , a Piros Iskola tanulói által nyert mérkőzések száma pedig  $(153 - (x + 28) =) 125 - x$ . (1 pont)

A szöveg szerint  $125 - x = 2(x + 28)$ , amiből  $x = 23$  (1 pont)

A Zöld Iskola tanulói **23 mérkőzést** nyertek a Piros Iskola tanulói ellen.

(1 pont)

**Összesen: 14 pont**

**36) A  $H$  halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a  $H$  elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.**

a) **Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!** (3 pont)

b) **Fogalmazza meg az állítás megfordítását a  $H$  elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!** (3 pont)

**Az  $ABCDE$  konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.**

c) **Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)** (5 pont)

**Egy négy pontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezzünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)**

d) **Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négy pontú körének élei!** (5 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Gráfelmélet 5. feladat

b) Lásd: Gráfelmélet 5. feladat

c) Rögzítsük  $A$  és  $B$  színét, például pirosra és kékre. (1 pont)

Ekkor  $C$ ,  $D$  és  $E$  (ebben a sorrendben) a következőképpen színezzük: pkz, pzk, zpz, zpk, zkz. (2 pont)



Mivel  $A$  és  $B$  színe  $(3 \cdot 2 =) 6$ -féleképpen választható meg, (1 pont)

ezért összesen  $(5 \cdot 6 =) 30$  különböző színezés lehetséges. (1 pont)

d) *Lásd: Valószínűségszámítás 35. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**37)**

a) **Legyen  $G$  egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy  $G$  csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.** (4 pont)

b) **Az  $A, B, C, D, E, F, G, H$  pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az  $A$  csúcsból indul ki!** (6 pont)

c) **Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)** (6 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Gráfelmélet 6. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 37. feladat*

c) Válasszunk ki tetszőlegesen egy sakkozót. (1 pont)

Az ő ellenfelét (a többi sakkozó közül) 7-féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

Folytatva ezt az eljárást a maradék hat sakkozó közül válasszunk ki tetszőlegesen egyet, az ő ellenfelét 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék négy sakkozó közül kiválasztva egyet, az ő ellenfelét 3-féleképpen választhatjuk ki. A negyedik párost az ezek után megmaradt két sakkozó alkotja (ez 1 lehetőség). (2 pont)

(Ez az eljárás minden lehetőséget megad, és mind-egyiket pontosan egyszer, ezért) a lehetséges párosítások száma a fentiek szorzata, azaz (1 pont)

$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$  (1 pont)

**Összesen 16 pont**

**38) a) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15?** (5 pont)

b) **Egy  $n$  elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ( $n \geq 4$ ). Határozza meg a halmaz elemszámát!** (8 pont)

**Megoldás:**

a)  $0+1+2+3+4+5+6=21$ , így a kimaradó három számjegy összege 6. (1 pont)

Kimaradhat a 0, 1, 5, vagy a 0, 2, 4 vagy az 1, 2, 3. (1 pont)

A 2, 3, 4, 6 és az 1, 3, 5, 6 számnégyesből is  $4! = 24$  darab megfelelő szám képezhető. (1 pont)

A 0, 4, 5, 6 számnégyesből  $3 \cdot 3! = 18$  szám képezhető. (1 pont)

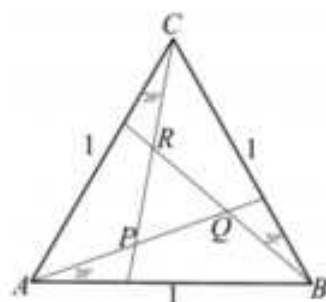
Összesen  $(24 + 24 + 18 =)$  **66** megfelelő négyjegyű szám van. (1 pont)

b) Lásd: Halmazok 10. feladat

**Összesen: 13 pont**

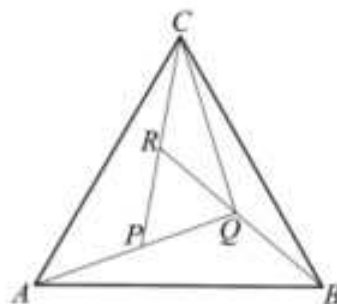
39) a) Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával. Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz! (4 pont)

Az egységnyi oldalú  $ABC$  szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható  $PQR$  szabályos háromszöget kaptuk.



b) Számítsa ki a  $PQR$  háromszög oldalának hosszát! (7 pont)

A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható  $ABQ$ ,  $BCQ$ ,  $CQR$ ,  $ACP$  és  $PQR$  háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.)



c) Összesen hány különböző színezés lehetséges? (5 pont)

### Megoldás:

a) Lásd: Síkgeometria 29. feladat

b) Lásd: Síkgeometria 29. feladat

c) A kiválasztott három színnel a páronként szomszédos  $CQR$ ,  $CAP$  és  $PQR$  háromszögeket  $(3!) = 6$ -féleképpen színezzük. (1 pont)

$ABQ$  és  $CQR$  háromszög színe megegyezik (mert az  $ABQ$  háromszög színe a  $CAP$  és a  $PQR$  háromszög színétől is különbözik). (1 pont)

$BCQ$  háromszöget kétféle színnel is színezzük (úgy mint  $CAP$ -t, vagy úgy mint  $PQR$ -t), (1 pont)

tehát a kiválasztott három színnel  $(6 \cdot 2 =)$  12 színezés lehetséges. (1 pont)

Mivel a három színt a négy közül négyféleképpen választhatjuk ki, ezért  $(4 \cdot 6 \cdot 2 =)$  **48** különböző színezés van. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

40) Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4 vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második.

a) Határozza meg a feltételeknek megfelelő lehetőségek (számhármások) számát! (5 pont)

Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson.

b) Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!

**Megoldás:**

a) Ha Ágoston mindhárom osztályzata azonos, akkor 5 megfelelő számhármass van. (1 pont)

Két egyforma és egy különböző osztályzatot 5·4-féleképpen szerezhették (a két egyforma osztályzat 5-féleképpen, a harmadik osztályzat 4-féleképpen választható). (1 pont)

Három különböző osztályzatot  $\binom{5}{3} = 10$ -féleképpen szerezhették. A nem

egyforma osztályzatok sorrendje mindkét esetben már egyértelmű. (2 pont)

A megfelelő esetek száma  $5 + 5 \cdot 4 + 10 = 35$ . (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 24. feladat*

**Összesen: 12 pont**

41) Az ábrán egy 3×3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A1, A2, ..., C3) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalon) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képen.



a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét! (3 pont)

b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll! (4 pont)

c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő! (2 pont)

d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármát úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képen kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.) (7 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Gráfelmélet 10. feladat*

b) *Lásd: Gráfelmélet 10. feladat*

c) *Lásd: Gráfelmélet 10. feladat*

d) A három kapcsolódó játékelem helyzete lehet vízszintes, függőleges vagy L alakú. (1 pont)

A vízszintes helyzetű elemhármassok száma 3, (1 pont)

és ugyanennyi a függőleges elemhármassoké is. (1 pont)

Négyféle L alakú, összefüggő elemhármass van:  $\lrcorner$   $\llcorner$   $\lrcorner$   $\llcorner$  (1 pont)

Mind a négy esetben a középső elem 4-féle lehet. (A fenti L alakoknak megfelelően rendre B2, B3, C2, C3; A2, A3, B2, B3; B1, B2, C1, C2; A1, A2, B1, B2.) (2 pont)

A megfelelő elemhármassok száma így  $2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22$ . (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

42) Kinga a következő tanítási napra hat házi feladatot kapott, három kötelezőt és három szorgalmi. Egy-egy kötelező házi feladatot kapott matematikából, angoltól és magyartól, ezeket biztosan elkészíti.

Szorgalmi házi feladatot biológiából, németből és történelemből kapott, ezeket nem feltétlenül csinálja meg: lehet, hogy mind a hármat elkészíti, lehet, hogy csak kettőt vagy egyet, de az is lehet, hogy egyet sem készít el.

- a) Összesen hányféle különböző sorrendben készítheti el Kinga a házi feladatait? (Két esetet különbözőnek tekintünk, ha vagy nem ugyanazokat a házi feladatokat, vagy ugyanazokat a házi feladatokat, de más sorrendben oldja meg.) (6 pont)

Kinga matematika-házifeladata ez volt: „500 különböző pozitív egész szám átlaga 1000. Legfeljebb mekkora lehet a számok közül a legnagyobb?”

- b) Adja meg Kinga matematika-házifeladatának megoldását! (5 pont)  
Kinga, Linda, Misi és Nándi elvállalta, hogy az alacsonyabb évfolyamok tanulói közül hét diákot rendszeresen korrepetálni fog. Az egyénekenként vállalt tanulók számát egy megbeszélésen döntik el.

- c) Hány különböző módon állapodhatnak meg abban, hogy melyikük hány tanulót korrepetáljon, ha mindegyikük vállal legalább egy tanulót? (Két megállapodást különbözőnek tekintünk, ha legalább egyikük nem ugyanannyi tanulót korrepetál a két megállapodás szerint.) (5 pont)

### Megoldás:

- a) Ha Kinga egyet sem old meg a szorgalmi feladatok közül, akkor  $3! = 6$ -féle, ha pedig mind a hármat megoldja, akkor  $6! = 720$ -féle különböző sorrendben oldhatja meg a házi feladatait. (1 pont)  
Ha egyet old meg a szorgalmi feladatok közül, akkor a négy feladatot  $4! = 24$ -féle különböző sorrendben oldhatja meg, (1 pont)  
viszont a szorgalmi feladat kiválasztására is 3 lehetősége van, így ez összesen  $24 \cdot 3 = 72$  különböző sorrendet jelent. (1 pont)  
Ha kettőt old meg a szorgalmi feladatok közül, akkor az öt feladatot  $5! = 120$ -féle különböző sorrendben oldhatja meg, (1 pont)  
viszont a két szorgalmi feladat kiválasztására is 3 lehetősége van, így ez összesen  $120 \cdot 3 = 360$  különböző sorrendet jelent. (1 pont)  
Ez összesen  $6 + 72 + 360 + 720 = \mathbf{1158}$  különböző lehetséges sorrendet jelent. (1 pont)
- b) *Lásd: Statisztika 17. feladat*
- c) Ha mindannyian legalább egy tanulót vállalnak, akkor (valamilyen sorrendben) 4, 1, 1, 1 vagy 3, 2, 1, 1 vagy 2, 2, 2, 1 tanulót fognak korrepetálni. (1 pont)  
Az első esetben 4-féleképpen választható ki közülük a négy tanulót korrepetáló személy. Ez 4 lehetőség. (1 pont)  
A második esetben 4-féleképpen választható ki a három tanulót korrepetáló személy, ezután pedig 3-féleképpen a 2 tanulót korrepetáló. Ez tehát  $4 \cdot 3 = 12$  lehetőség. (1 pont)  
A harmadik esetben 4-féleképpen választható ki az egy tanulót korrepetáló személy. Ez is 4 lehetőség. (1 pont)  
Összesen tehát  $4 + 12 + 4 = \mathbf{20}$ -féleképpen állapodhatnak meg. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

43) Marci szeret az autók rendszámában különböző matematikai összefüggéseket felfedezni. (A rendszámok Magyarországon három betűből és az azokat követő három számjegyből állnak.)

Az egyik általa kedvelt típusnak a „prímes” nevet adta: az ilyen rendszámoknál a PRM betűket követő három számjegy szorzata prímszám.

a) Hány különböző „prímes” rendszám készíthető? (3 pont)

Egy másik típusnak a „hatos” nevet adta: az ilyen rendszámokban a HAT betűket követő három számjegy összege 6.

b) Hány különböző „hatos” rendszám készíthető? (5 pont)

Egy harmadik típus a „logaritmosos”. Ezek általános alakja:  $\text{LOG-}abc$ , ahol az  $a$ ,  $b$ , és  $c$  számjegyekre (ebben a sorrendben) teljesül, hogy  $\log_a b = c$ .

c) Hány különböző „logaritmosos” rendszám készíthető? (6 pont)

### Megoldás:

a) Három számjegy szorzata prím, ha két számjegy 1-es, a harmadik pedig prím. (1 pont)

Egyjegyű prímszám négy darab van: 2, 3, 5, 7. (1 pont)

Bármely kiválasztott prímszám három helyen fordulhat elő, így összesen  $4 \cdot 3 = 12$  különböző „prímes” rendszám készíthető. (1 pont)

b) A 6 előállítási lehetőségei három számjegy összegeként (a sorrendtől eltekintve):

$6+0+0$ ,  $5+1+0$ ,  $4+2+0$ ,  $4+1+1$ .

$3+3+0$ ,  $3+2+1$ ,  $2+2+2$ . (2 pont)

Az ezekből előállítható számhármassok száma rendre:

3, 6, 6, 3, 3, 6, 1. (2 pont)

Összesen  $3+6+6+3+3+6+1 = 28$ -féle „hatos” rendszám készíthető.

(1 pont)

c) Definíció szerint  $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ , ahol  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  és  $b > 0$ , így  $2 \leq a \leq 9$  és  $1 \leq b \leq 9$ . (1 pont)

Esetszétválasztás  $c$  lehetséges értékei alapján:

Ha  $c = 0$ , akkor  $b = 1$  és  $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , vagy  $9$ .

Ez 8 lehetőség. (1 pont)

Ha  $c = 1$ , akkor  $a = b = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , vagy  $9$ .

Ez 8 lehetőség. (1 pont)

Ha  $c = 2$ , akkor  $a = 2$  és  $b = 4$ , vagy  $a = 3$  és  $b = 9$ .

Ez 2 lehetőség. (1 pont)

Ha  $c = 3$ , akkor  $a = 2$  és  $b = 8$ .

Ez 1 lehetőség. (1 pont)

( $c \geq 4$  nem lehet, hiszen  $b = a^4 \geq 2^4 = 16$  lenne, így)

Összesen  $8+8+2+1 = 19$  „logaritmosos” rendszám készíthető. (1 pont)

**Összesen: 14 pont**

44) Egy továbbképzésen részt vevő csoport tagjai életkorának átlaga 28 év. Az öt legidősebb résztvevő életkorának átlaga 40 év, a többieké 25,6 év.

a) Hány nő és hány férfi vesz részt a továbbképzésen, ha 1,5-szer annyi nő van a csoportban, mint férfi? (7 pont)

A csoport tagjai az egyik napon „keleties” ebédet kaptak. Az ételek ízesítéséhez hatféle fűszer állt rendelkezésükre: keserű, savanyú, édes, sós, csípős és fanyar.

b) Hányféleképpen ízesíthetik az ételeiket a résztvevők úgy, hogy a hatból három- vagy négyféle fűszert használhatnak, de az édes és a keserű nem szerepelhet egyszerre? (6 pont)

**Megoldás:**

a) *Lásd: Statisztika 20. feladat*

b) Ha nincs sem édes, sem keserű a választott fűszerek között, akkor (a többi négyből hármat vagy négyet kell választani, ezért) a lehetséges választások

száma  $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 1 = 5$ . (2 pont)

Ha van édes, de nincs keserű, akkor (a többi négy közül kettőt vagy hármat kell választani, ezért)  $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$  lehetőség van. (2 pont)

Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha keserű van, de édes nincs. (1 pont)

Az összes ízesítési lehetőség száma tehát  $5 + 10 + 10 = 25$ . (1 pont)

**Alternatív megoldás:**

Az összes, 3 vagy 4 fűszert tartalmazó lehetőségéből levonjuk azoknak az ízesítéseknek a számát, amelyekben édes és keserű is szerepel. (1 pont)

3 vagy 4 fűszert összesen  $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} (= 35)$  különböző módon lehet választani (összes eset). (2 pont)

Olyan (3 vagy 4 fűszert tartalmazó) ízesítés, amelyben édes és keserű is van,

$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 10$  különböző módon választható (kedvezőtlen esetek). (2 pont)

A megfelelő ízesítési lehetőségek száma tehát  $35 - 10 = 25$ . (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

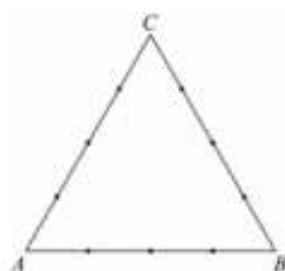
45) Az  $ABC$  szabályos háromszög mindhárom oldalát 3-3 osztóponttal négy egyenlő részre osztottuk.

a) Hány olyan négyszög van, melynek mind a négy csúcsa a háromszög oldalain kijelölt 9 pont közül való úgy, hogy a négyszögnek a háromszög mindegyik oldalán van legalább egy csúcsa?

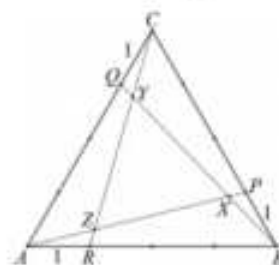
(Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csúcsukban különböznek.)

Jelölje a 4 egység oldalú  $ABC$  szabályos háromszög  $BC$  oldalának  $B$ -hez közelebbi negyedelőpontját  $P$ , a  $CA$  oldal  $C$ -hez közelebbi negyedelőpontját  $Q$ , az  $AB$  oldal  $A$ -hoz közelebbi negyedelőpontját pedig  $R$ . Jelölje továbbá  $AP$  és  $BQ$  szakaszok metszéspontját  $X$ ,  $BQ$  és  $CR$  szakaszok metszéspontját  $Y$ , végül  $CR$  és  $AP$  szakaszok metszéspontját  $Z$ .

b) Határozza meg az  $XYZ$  háromszög területét!



(5 pont)



(11 pont)

**Megoldás:**

a) A háromszög egyik oldaláról kettő, a másik két oldaláról egy-egy pontot kell kiválasztani. (1 pont)

3-féleképpen választhatjuk ki azt az oldalt, amelyikről két pontot választunk. (1 pont)

Az ezen az oldalon kijelölt három pont közül 3-féleképpen választhatunk ki kettőt. (1 pont)

A másik két oldal mindegyikéről 3-féleképpen választhatjuk ki a négyszög harmadik, illetve negyedik csúcsát. (1 pont)

Összesen tehát  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ , a feltételeknek megfelelő négyszög van. (1 pont)

### Alternatív megoldás:

Összesen  $\binom{9}{4} = 126$  lehetőség van a 4 pont kiválasztására. (1 pont)

Kedvezőtlen eset, ha egy oldalról 3 pontot választunk, egy másik oldalról pedig egyet: ez  $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$  eset (mert 3-féleképpen választható ki ez a két oldal, a második kiválasztott oldalról pedig 3-féleképpen választható ki egy pont). (1 pont)

Kedvezőtlen az is, ha két oldalról 2-2 pontot választunk: ez  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  eset (mert 3-féleképpen választható ki a két oldal, egy-egy oldalról pedig 3-3-féleképpen választható ki két pont). (2 pont)

A kedvező esetek száma tehát  $126 - 18 - 27 = 81$ . (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 40. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**46) Az ABCD konvex négyszögben  $AB = 50$  m,  $BC = 60$  m,  $CD = 70$  m, továbbá  $\angle BAD = \angle BCD = 100,3^\circ$ .**

**a) Számítsd ki a négyszög területét! (9 pont)**

**Az ABCD konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.)**

**b) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk? (6 pont)**

### Megoldás:

a) *Lásd: síkgeometria 41. feladat*

b) A felhasznált 3 színt  $\binom{4}{3} = 4$ -féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

Mivel 4 háromszög van, és csak 3 szín, ezért két háromszögnek azonos színűnek kell lennie. Ezek csakis szemköztiek lehetnek a feladat szövegének feltételei alapján. (1 pont)

A két azonos színű szemközti háromszöget 2-féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

Az azonos színűek színét 3-féleképpen választhatjuk meg, (1 pont)

a maradék két háromszöget a maradék két színnel tudjuk kiszínezni kétféleképpen. (1 pont)

A lehetséges színezések száma így  $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ . (1 pont)

### Alternatív megoldás:

Mivel 4 háromszög van, és csak 3 szín, ezért az egyik színt kétszer is fel kell használnunk. (1 pont)

Ezt a színt 4-féleképp választhatjuk ki. (1 pont)

Ezzel a színnel két szemközti háromszöget kell kiszíneznünk, ezeket 2-féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

A maradék két háromszög a maradék 3 szín közül kettővel,  $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen színezhető ki. (2 pont)

A lehetséges színezések száma így  $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ . (1 pont)

### **Alternatív megoldás:**

Az  $AB$  oldalra illeszkedő háromszög színe 4, ezután a  $BC$  oldalra illeszkedő háromszög színe 3-féle lehet. (1 pont)

Ez a két háromszög  $4 \cdot 3 = 12$ -féleképpen színezhető ki. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az  $AB$  oldalra illeszkedő háromszöget pirosra, a  $BC$ -re illeszkedőt kékre színezzük. Ezzel vagy a piros vagy a kék színt még egyszer használnunk kell. (1 pont)

Vagy a  $CD$  oldalra illeszkedő háromszög piros, vagy a  $DA$  oldalra illeszkedő kék. A negyedik háromszög mindkét esetben sárga vagy zöld lehet. Az első két háromszög bármely színezéséhez tehát 4-féleképpen színezhetjük az utolsó két háromszöget. (2 pont)

Így a lehetséges színezések száma  $12 \cdot 4 = 48$ . (1 pont)

**Összesen: 15 pont**

**47) Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az  $A, B, C, D, E, F$  hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság ismeretségi hálója (ismeretségi gráfja). (Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.) A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy  $A$ -nak 5,  $B$ -nek 4,  $C$ -nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán  $D, E, F$  egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.**

**a) Hányféle lehet a  $D, E, F$  csoport ismeretségi hálója?**

**A friss bizonyítékok szerint a  $D, E, F$  csoportban mindenki ismeri a másik két személyt. (3 pont)**

**b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az  $A, B, C, D, E, F$  hattagú társaság ismeretségi hálója? (9 pont)**

**A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben  $A$  és  $B$  együtt nincs jelen.**

**c) Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni? (4 pont)**

### **Megoldás:**

a) *Lásd: Gráfelmélet 17. feladat*

b) *Lásd: Gráfelmélet 17. feladat*

c) Azon csoportok száma, amelyben  $A$  benne van, de  $B$  nincs:  $\binom{4}{2} = 6$ . (A maradék 4 személyből 2 kerül  $A$  mellé.) (1 pont)

Hasonlóan  $\binom{4}{2} = 6$  azon csoportok száma, amelyben  $B$  benne van, de  $A$  nincs (szimmetria). (1 pont)

Amelyben sem  $A$ , sem  $B$  nincs benne:  $\binom{4}{3} = 4$ . (1 pont)



A megfelelő csoportok száma  $6 + 6 + 4 = 16$ ,

**tehát 16 kihallgatást kell szervezni.**

(1 pont)

**Alternatív megoldás:**

A komplementer összeszámlálás módszerét alkalmazzuk. Ez derüljön ki a megoldásból. (1 pont)

A 3 fős csoportok száma  $\binom{6}{3} = 20$  (összes eset). (1 pont)

$\binom{4}{1} = 4$  olyan csoport van, melynek  $A$  és  $B$  is a tagja - kedvezőtlen esetek. (A

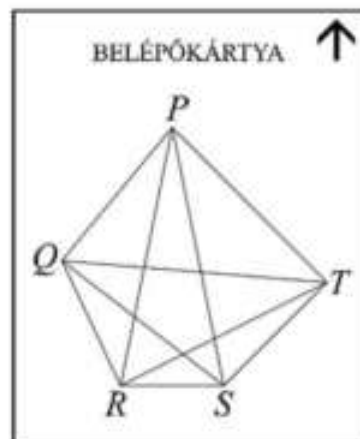
maradék 4 személyből 1 kerül  $A$  és  $B$  mellé.) (1 pont)

A megfelelő csoportok száma  $20 - 4 = 16$ , **tehát 16 kihallgatást kell szervezni.**

(1 pont)

**Összesen: 16 pont**

48) Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a  $PQRST$  konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyikben szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.) A konferenciának 400 résztvevője lesz.



a) **Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya?** (3 pont)

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai  $A$ ,  $B$  és  $C$ , akkor  $AB = AC = 130$  méter, és  $BC = 100$  méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes  $CD$  kerítés úgy, hogy a  $BCD$  háromszög alakú rész területe  $200 \text{ m}^2$ . ( $D$  az  $AB$  oldalon van.)

b) **Milyen hosszú a  $CD$  kerítés?** (7 pont)

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) **Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga?** (4 pont)

**Megoldás:**

a) Az ötszögnek 5 oldala és 5 átlója van. A 10 szakasz mindegyike kétféle lehet (vastagított vagy nem vastagított). (1 pont)

Az összes különböző lehetőség száma ezért  $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} = 1024$ . (1 pont)

$1024 > 400$ , így **mindenkinek jut különböző kártya.** (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 42. feladat*

c) *Lásd: Statisztika 22. feladat*

**Összesen: 14 pont**