OKTATÁSI HIVATAL

2021/2022. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Egy 37 fős osztály dolgozatot írt. Bárhogyan is választunk ki az osztályból 7 diákot, mindig lesz a kiválasztottak között legalább 2 olyan tanuló, akinek azonos lett a dolgozatra kapott pontszáma. Bizonyítsa be, hogy van az osztályban legalább 4 fiú vagy 4 lány, akinek azonos lett a pontszáma.

   <u>Megoldás:</u>

   A dolgozatok pontszámai között legfeljebb 6-féle érték szerepelhet, különben a skatulyaelv szerint ki tudnánk választani 7 olyan diákot, akik különböző pontszámot kaptak a dolgozatukra. — 4 pont

   A 37 dolgozat között a skatulya elv alapján biztosan van legalább 7 olyan, amelynek egyforma a pontszáma. Ugyanis ha 6 egyforma dolgozat lenne mind a 6 különböző pontszámúból, akkor az csak $6 \cdot 6 = 36$ dolgozatot eredményezne. — 3 pont

   A 7 azonos pontszámú dolgozat írói között biztosan van vagy legalább 4 fiú vagy legalább 4 lány, különben legfeljebb 3 fiúnak és legfeljebb 3 lánynak csak legfeljebb 6 dolgozata lenne. — <u>3 pont</u>

   Összesen: 10 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

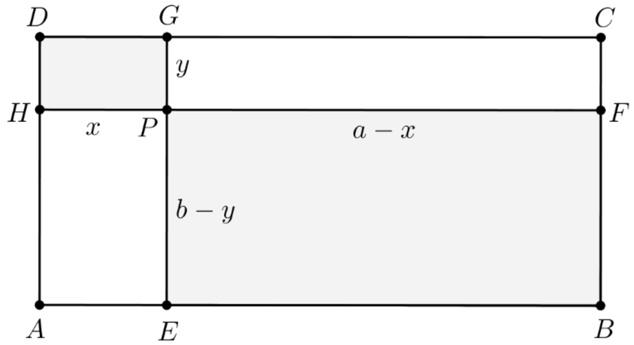
Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

2. Az $ABCD$ téglalapot egyik belső P pontján keresztül az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel négy téglalapra osztottuk fel. Az így kapott téglalapok oldalhosszai egész számok. Közülük kiválasztható két olyan téglalap, amelyeknek egyetlen közös csúcsa P, és a téglalapok területe 11 és 47 területegység. Mekkora annak az egész oldalhosszúságú négyzetnek az oldala, amelyik ugyanakkora területű, mint az $ABCD$ téglalap?

Megoldás:

Legyen az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$, illetve $BC = DA = b$, és tekintsük a P belső pont segítségével a feltételeknek megfelelően létrehozott $AEPH$, $EBFP$, $FCGP$ és $GDHP$ téglalapokat.



A négy téglalap közül nyilván 2-2 felel meg annak a feltételnek, hogy egyetlen közös csúcsuk a P pont. Nem sérti az általánosságot, ha ennek a feltételnek megfelelő, 11, illetve 47 egységnyi területű téglalapnak rendre a $GDHP$ illetve az $EBFP$ téglalapokat választjuk. 1 pont

Az ábra jelöléseivel ezen téglalapok területe:

$$T_{GDHP} = x \cdot y \text{ és } T_{EBFP} = (a-x)\cdot(b-y),$$

ahol feltételek szerint az x, y, $a-x$, $b-y$ pozitív egész számok. Nyilvánvaló, hogy ekkor az a és b számok is pozitív egészek. 2 pont

Keressük tehát az

$$\begin{cases} x \cdot y = 11, \\ (a-x)(b-y) = 47 \end{cases}$$

egyenletrendszer pozitív egészekből álló megoldásait.

A 11 és a 47 prímszámok, amelyek csak $11 = 1 \cdot 11$, illetve $47 = 1 \cdot 47$ alakban bonthatók fel pozitív egész számok szorzatára. 1 pont

Két különböző eset fordulhat elő a P csúcsban találkozó két-két szemben fekvő szakaszra nézve: két 1 egységnyi szakasz találkozik, és akkor a másik két szakasz hossza 11, illetve 47, vagy pedig a két szemben fekvő szakasz közül az egyik hossza 1, a másiké 47, és a fennmaradó két szakasz hossza 11, illetve 1. 1 pont

Első eset: $x = a - x = 1$ és akkor $y = 11$, illetve $b - y = 47$.

Második eset: $x = 1$ és $a - x = 47$, ekkor $y = 11$ illetve $b - y = 1$. 2 pont

Az első esetben $a = 2$ és $b = 58$ értékeket kapjuk, ekkor az $ABCD$ téglalap területe $T_{ABCD} = a \cdot b = 116$, ez azonban nem négyzetszám, így nem lehet egyenlő egy egész oldalhosszúságú négyzet területével. 1 pont

A második esetben $a = 48$ és $b = 12$, így az $ABCD$ téglalap területe $T_{ABCD} = a \cdot b = 576 = 24^2$, eszerint a téglalap területe egy 24 oldalú négyzet területével egyenlő. 1 pont

Ezek alapján az $ABCD$ téglalap területére $T_{ABCD} = 24^2$ teljesül, a téglalap területe tehát egy 24 egység oldalhosszúságú négyzet területével egyenlő. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *Ugyanez a megoldás adódik, ha az* $y = b - y = 1$, *vagy ha az* $y = 1$ *és* $b - y = 47$ *számokat választjuk.*

3. Ádám összeszorzott két tízes számrendszerben felírt pozitív kétjegyű számot, és észrevette, hogy ha egymás után írta volna őket, akkor a szorzat kétszeresét kapta volna. Melyik két számot szorozta össze Ádám?

Megoldás:

Jelöljük az egyik kétjegyű számot x-szel, a másikat pedig y-nal. Ekkor a két szám szorzata $x \cdot y$, és ha egymás után írjuk őket, akkor a $100x + y$ négyjegyű számot kapjuk. (A $100y + x$ esettől a szimmetria miatt eltekinthetünk.) 1 pont

A feltétel alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$2xy = 100x + y.$$ 2 pont

Rendezés és kiemelés után kapjuk, hogy

$$2x(y - 50) - y = 0.$$

Az egyenlet mindkét oldalához 50-et hozzáadva a bal oldalon szorzatot képezünk:

$$(2x - 1)(y - 50) = 50.$$ *3 pont

Mivel x és y is pozitív kétjegyű szám, ezért $2x - 1 > 18$ (és $y - 50 < 50$).

Az 50 kéttényezős szorzattá való felbontásában a $2x - 1$ tényező csak a 25 lehet, hiszen ez az egyetlen 18-nál nagyobb páratlan osztója az 50-nek. **2 pont

Ekkor az $y - 50 = 2$, tehát $x = 13$ és $y = 52$. 1 pont

Tehát a 13 és az 52 a két összeszorzott szám, mert $13 \cdot 52 = 676$ és $2 \cdot 13 \cdot 52 = 1352$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1) *A *-gal jelölt 3 pontot kapja meg a versenyző, ha az egyenletet* $y = 50 + \dfrac{50}{2x - 1}$ *alakra hozza.*
2) *A **-gal jelölt 2 pontot kapja meg a versenyző, ha az 50 pozitív osztópárjaiból más, helyes indoklással kizárja a rossz megoldásokat.*

4. Határozza meg a p valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy a $p\cdot 10^{x}+10^{-x}=10$ egyenletnek csak egyetlen valós megoldása van.

Megoldás:

Alakítsuk át az egyenletet a negatív hatványkitevő definíciójának alkalmazásával, így adódik, hogy

$$p\cdot 10^{x}+\frac{1}{10^{x}}=10.$$

Vezessünk be új változót, legyen $a=10^{x}$, ahol $a>0$. 1 pont

Ekkor a

$$p\cdot a+\frac{1}{a}=10$$ 1 pont

egyenlethez jutunk, amelyből a-val való szorzás és rendezés után az

(1) $$p\cdot a^{2}-10a+1=0,\ (a>0)$$

egyenletet kapjuk.

Három esetet vizsgálunk.

Első eset: Amennyiben $p=0$, akkor az (1) egyenlet megoldása $a=\frac{1}{10}$, vagyis $10^{x}=\frac{1}{10}$.

Ekkor a 10^{x} függvény kölcsönös egyértelműsége miatt egyetlen megoldása van az egyenletnek, mégpedig $x=-1$. *2 pont

Második eset: Ha $p\neq 0$, akkor az (1) egyenlet másodfokú.

A másodfokú egyenlet diszkriminánsát vizsgálva $D<0$ esetén nincs megoldása az egyenletnek.

$D=0$ és $a>0$ esetén pontosan egy megoldása van az (1) egyenletnek.

$D=100-4p=0$, amelyből $p=25$.

Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe $25a^{2}-10a+1=0$, amelynek a megoldása $a=\frac{1}{5}$, amely pozitív, vagyis $10^{x}=\frac{1}{5}$.

Ekkor a logaritmus definíciója miatt egyetlen megoldása van az egyenletnek, mégpedig $x=\lg\frac{1}{5}\approx -0{,}699$. *2 pont

Harmadik eset: A másodfokú egyenlet diszkriminánsát tovább vizsgálva $D>0$ esetén pontosan akkor van egy megoldása az (1) egyenletnek, ha a gyökei közül pontosan az egyik pozitív.

$D=100-4p>0$, amelyből $p<25$. 1 pont

A Viète-formula alapján pontosan akkor lesz egy pozitív megoldása az (1) egyenletnek, ha a gyökök szorzata negatív. A gyökök szorzata nem lehet zérus, mert a 0 nem megoldása az (1) egyenletnek.

Tehát $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{p} < 0$, amely pontosan akkor teljesül, ha $p < 0$.

Ebben az esetben az (1) egyenlet megoldásai a következők:

$a_1 = \frac{10+\sqrt{100-4p}}{2p} = \frac{5+\sqrt{25-p}}{p}$ és $a_2 = \frac{10-\sqrt{100-4p}}{2p} = \frac{5-\sqrt{25-p}}{p}$, ezek közül nyilván csak a_2 a megfelelő, hiszen $a_1 < 0$ és $a_2 > 0$. Eszerint $10^x = \frac{5-\sqrt{25-p}}{p}$, és ezért az eredeti egyenlet megoldása $x = \lg\frac{5-\sqrt{25-p}}{p}$. **2 pont

Összegezve az egyenletnek akkor van egyetlen megoldása, ha $p \le 0$ vagy $p = 25$. 1 pont

Összesen: 10 pont

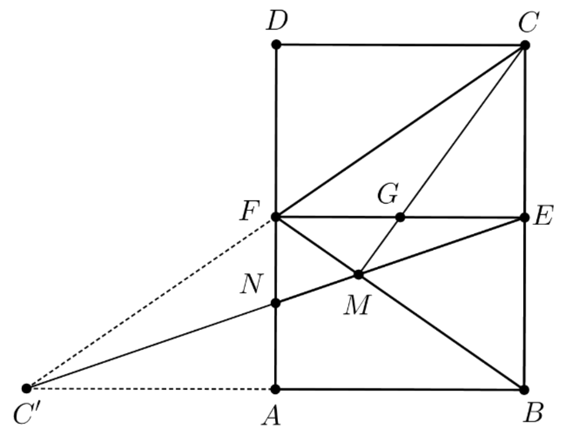
Megjegyzések:

1) *A *-gal jelölt pontokat akkor is megkapja a versenyző, ha az egyenlet megoldásait nem adja meg, de helyesen bizonyítja, hogy csak egy megoldás van.*
2) *A **-gal jelölt 2 pontot kapja meg a versenyző, ha a megoldóképlet segítségével helyesen indokolja, hogy csak egy megoldás van. Az x értékét a 2 pont megszerzéséhez nem kell megadnia.*

5. Az $ABCD$ téglalap BC és DA oldalainak felezőpontja rendre E, illetve F, az FA szakasz felezőpontja N, a BF és EN szakaszok metszéspontja M. Milyen arányban osztja a CM egyenes az EF szakaszt?

Első megoldás:

Tekintsük az alábbi ábrát. Tükrözzük a C pontot az F pontra, a tükörkép az AB oldal egyenesének C' pontja. Kössük össze ezt a C' pontot E-vel. 2 pont



Ekkor nyilvánvaló, hogy a $CC'B$ háromszögben BF és $C'E$ súlyvonalak. 2 pont

A $C'E$ súlyvonal felezi a $CC'B$ háromszög BC-vel párhuzamos AF középvonalát, ami azt jelenti, hogy $C'E$ áthalad az N ponton is, ezért a C', N, M, E pontok egy egyenesre esnek. *2 pont

Eszerint egyrészt a $CC'B$ háromszög súlypontja M pont, másrészt a háromszög harmadik súlyvonala CA, hiszen A felezi BC' szakaszt. 2 pont

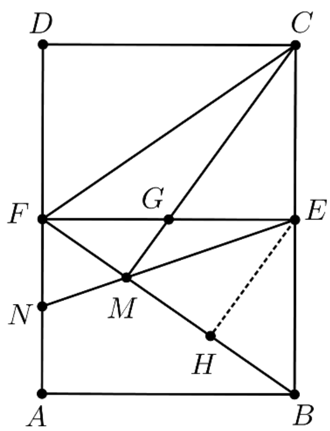
A CA súlyvonal áthalad az M súlyponton, és felezi a háromszög BC'-vel párhuzamos EF középvonalát, vagyis G az EF szakasz felezőpontja, és ezért $\frac{EG}{FG}=\frac{1}{1}$. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *Ha a versenyző nem bizonyítja, hogy a C', N, M, E pontok egy egyenesen vannak akkor a *-gal jelölt 2 pontból legfeljebb 1 pontot kaphat.*

Második megoldás:

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk.



Legyen a CM egyenes és az EF szakasz metszéspontja G. Az E ponton keresztül párhuzamost húzunk a CM egyenessel, ez a párhuzamos a BF szakaszt a H pontban metszi. 2 pont

Az FNM és BEM háromszögekben $FNM\sphericalangle = BEM\sphericalangle$, mert váltószögek az FN és BE oldalak párhuzamossága miatt. Hasonlóképpen váltószögek $NFM\sphericalangle$ és $EBM\sphericalangle$, tehát ezek is egyenlők, végül $FMN\sphericalangle = BME\sphericalangle$, mert csúcsszögek. 1 pont

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az FNM és BEM háromszögek hasonlók, a megfelelő oldalak aránya $\frac{FN}{BE}=\frac{1}{2}$, mivel N felezi a BE-vel egyenlő hosszúságú FA oldalt. 1 pont

Tekintsük most a BCM háromszöget. Ebben EH középvonal, mert E felezi BC-t és $EH \parallel CM$.

Ez azt jelenti, hogy a BM szakasz felezőpontja H. 2 pont

Nyilvánvaló, hogy az FNM és BEM hasonló háromszögekben $\frac{FM}{BM}=\frac{1}{2}$ is igaz, amelyből $BM=2FM$ következik, és mivel a BM felezőpontja H, ezért az FH szakasz felezőpontja M. 1 pont

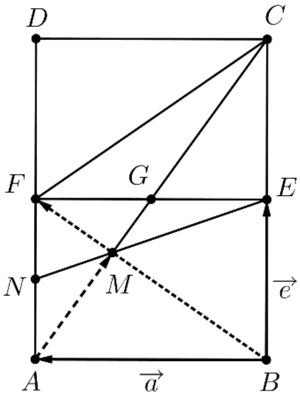
Az EFH háromszögben $GM \parallel EH$ és M felezi FH-t, tehát GM középvonala az EFH háromszögnek. 2 pont

A GM középvonal ezért felezi az EF oldalt is, azaz $\frac{EG}{FG}=\frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Harmadik megoldás:

Vezessük be a következő vektorjelöléseket: $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BE}=\vec{e}$.



Belátjuk, hogy az FNM és BEM háromszögek hasonlók. Az FN és BE szakaszok párhuzamossága miatt $FNM\sphericalangle$ és $BEM\sphericalangle$, illetve $NFM\sphericalangle$ és $EBM\sphericalangle$ váltószögek, tehát $FNM\sphericalangle=BEM\sphericalangle$, illetve $NFM\sphericalangle=EBM\sphericalangle$. Ugyanakkor teljesül $FMN\sphericalangle=BME\sphericalangle$ is, mert csúcsszögek. 1 pont

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az FNM és BEM háromszögek hasonlók, és mivel N felezi a BE-vel azonos hosszúságú FA oldalt, ezért a hasonlóság aránya $\frac{FN}{BE}=\frac{NM}{EM}=\frac{FM}{BM}=\frac{1}{2}$. 1 pont

Választott jelöléseinkkel egyrészt $\overrightarrow{BC}=2\vec{e}$, valamint $\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{e}$, és az $\frac{FM}{BM}=\frac{1}{2}$ arány miatt

(1) $$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\left(\vec{a}+\vec{e}\right).$$ 2 pont

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}$, ezért az (1) vektoregyenlet szerint $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\vec{a}+\vec{e}\right)-\vec{a}$, azaz

(2) $$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\vec{e}-\frac{1}{3}\vec{a}.$$ 2 pont

Világos továbbá, hogy $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$, vagyis

(3) $$\overrightarrow{AC}=2\vec{e}-\vec{a}.$$ 1 pont

A (2) és (3) vektoregyenletek szerint az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok egyirányúak, amely csakis úgy lehetséges, ha az A, M és C pontok egy egyenesen vannak, és nyilvánvaló, hogy erre az egyenesre illeszkedik a G pont is. 2 pont

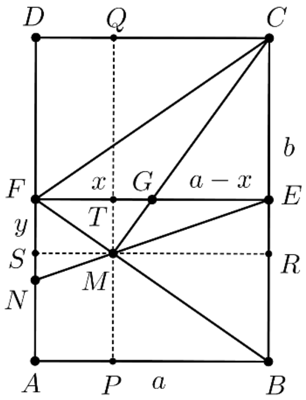
Ez esetben az ABC háromszögben EG középvonal, ami azt is jelenti, hogy $EG=\frac{BA}{2}$, és mivel $EF=BA$, ezért $EG=\frac{EF}{2}$. Eszerint tehát G felezi az EF szakaszt, és így $\frac{EG}{FG}=\frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *Az origót más pontban felvéve hasonlóképp igazolható, hogy az A, M, C pontok egy egyenesre illeszkednek.*

Negyedik megoldás:

Legyen az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$ és $BC = DA = b$.



Tekintsük a következő ábrát, amelyen az M ponton keresztül párhuzamosokat húztunk a téglalap oldalaival. A BC-vel párhuzamos egyenes az AB és CD oldalakat a P, illetve Q pontokban, az AB-vel párhuzamos egyenes a BC és DA oldalakat az R, illetve S pontokban, végül a téglalap EF középvonalát a PQ egyenes a T pontban metszi. Legyen továbbá $FG = x$, ezzel $EG = a - x$, illetve legyen $FS = y$. 2 pont

Az FNM és BEM háromszögek hasonlók, mert az FN és BE szakaszok párhuzamossága miatt $FNM\sphericalangle$ és $BEM\sphericalangle$, illetve $NFM\sphericalangle$ és $EBM\sphericalangle$ váltószögek, tehát $FNM\sphericalangle = BEM\sphericalangle$, illetve $NFM\sphericalangle = EBM\sphericalangle$. Az $FMN\sphericalangle$ és $BME\sphericalangle$ pedig csúcsszögek, ezért egyenlők. 1 pont

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, és mivel N felezi a BE-vel azonos hosszúságú FA oldalt, ezért a hasonlóság aránya $\frac{FN}{BE} = \frac{NM}{EM} = \frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$. 1 pont

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságok aránya és a megfelelő oldalakból a magasságok által lemetszett megfelelő szakaszok aránya is megegyezik a hasonlóság arányával, így $\frac{SM}{RM} = \frac{1}{2}$, illetve $\frac{FS}{BR} = \frac{1}{2}$, amelyből $SM = FT = AP = \frac{a}{3}$ és $RM = ET = BP = \frac{2a}{3}$, valamint $BR = 2y$ következik. 2 pont

Mivel $FS = TM = ER = y$ és $BR = 2y$, továbbá $ER + BR = 3y = \frac{b}{2}$, ezért $y = \frac{b}{6}$. 1 pont

Az MTG és MQC derékszögű háromszögekben az MT, MQ, illetve MG, MC oldalak egy egyenesre esnek, illetve $TG \parallel QC$, tehát ez a két háromszög hasonló, a megfelelő oldalak aránya $\frac{GT}{CQ} = \frac{MT}{MQ}$, ahonnan

(1) $$\frac{x - \frac{a}{3}}{\frac{2a}{3}} = \frac{\frac{b}{6}}{\frac{b}{6} + \frac{b}{2}},$$

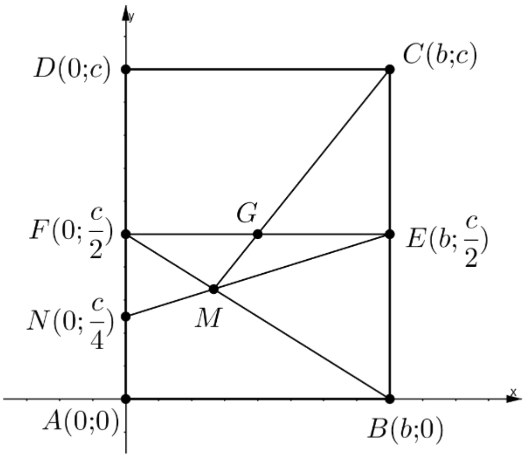
hiszen $GT = FG - FT = x - \frac{a}{3}$, $CQ = BP = \frac{2a}{3}$, illetve $MT = y = \frac{b}{6}$ és $MQ = MT + TQ = \frac{b}{6} + \frac{b}{2}$. 2 pont

Az (1) egyenletből a műveletek elvégzésével, rendezéssel és egyszerűsítéssel azt kapjuk, hogy $x=\frac{3a}{6}=\frac{a}{2}$, ez pedig azt jelenti, hogy G felezőpontja az EF szakasznak, és ezért $\frac{EG}{FG}=\frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Ötödik megoldás:

Helyezzük el az $ABCD$ téglalapot a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy az A pont az origóban legyen, a B pont az x-tengelyre, a D pont az y-tengelyre illeszkedjen. A feladatban megadott pontokat és azok koordinátáit a bal oldali ábrán szemléltetjük. A téglalap elhelyezése miatt nyilvánvaló, hogy a pontok koordinátáiban szereplő b és c számok pozitívak. 2 pont



Az NE egyenes meredekségére $m_{NE}=\frac{\frac{c}{2}-\frac{c}{4}}{b}=\frac{c}{4b}$, és mivel az egyenes az y-tengelyt az $N\left(0;\frac{c}{4}\right)$ pontban metszi, ezért az NE egyenes egyenlete

(1) $$y=\frac{c}{4b}x+\frac{c}{4}.$$

Az FB egyenes meredeksége $m_{FB}=\frac{0-\frac{c}{2}}{b}=-\frac{c}{2b}$, az egyenes az y-tengelyt az $F\left(0;\frac{c}{2}\right)$ pontban metszi, ezért az egyenes egyenlete

(2) $$y=-\frac{c}{2b}x+\frac{c}{2}.$$ 2 pont

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásával $x=\frac{b}{3}$ és $y=\frac{c}{3}$, ezért az NE és FB egyenesek M metszéspontjának koordinátái $M\left(\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$. 1 pont

Az MC egyenes egy irányvektorának koordinátái $\vec{v}_{MC}\left(b-\frac{b}{3};c-\frac{c}{3}\right)=\left(\frac{2b}{3};\frac{2c}{3}\right)$,

ahonnan az egyenes egy másik irányvektora $\vec{v}_{MC}\left(b;c\right)$. 1 pont

Az egyenes áthalad a $C\left(b;c\right)$ ponton, ezért MC egyenlete

$cx-by=c\cdot b-b\cdot c\left(=0\right)$, ahonnan

(3) $$y=\frac{c}{b}x.$$ 1 pont

A G pont az $y=\frac{c}{2}$ egyenletű EF egyenesre illeszkedik, ezért G koordinátáit úgy kapjuk meg, ha megoldjuk az $y=\frac{c}{2}$ és a (3) egyenletekből álló egyenletrendszert.

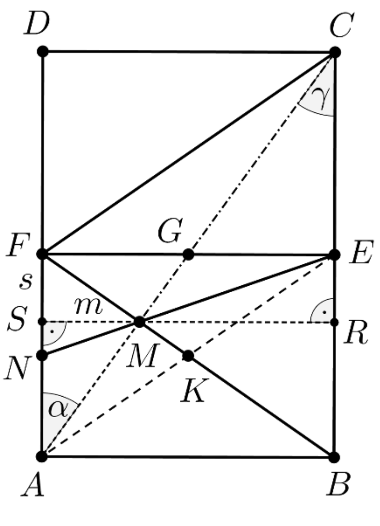
Egyszerű számítással adódik, hogy $x=\frac{b}{2}$ és $y=\frac{c}{2}$, tehát $G\left(\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$. 2 pont

A G pont első koordinátája pontosan azt jelenti, hogy G felezi az EF szakaszt, és így $\frac{EG}{FG}=\frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Hatodik megoldás:

Szerkesszünk párhuzamost az AB oldallal az M ponton keresztül. Ez az egyenes a BC oldalt az R, a DA oldalt az S pontban metszi, ezzel létrehoztuk az AMS és CMR derékszögű háromszögeket. A bal oldali ábrán $MS=m$, illetve $FS=s$, továbbá az AE és a BF szakaszok metszéspontja K. 1 pont



Az $ABEF$ téglalap szimmetriaközéppontja a K pont, ezért K felezi az AE szakaszt, N pedig felezi az AF szakaszt, tehát FK és EN az AEF háromszög súlyvonalai, és így M a háromszög súlypontja. 2 pont

A súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért $EM=2MN$, valamint $FM=2MK$. A K pont nyilván felezi a BF szakaszt is, így az előző eredményünk alapján $BK=FK=3MK$, ebből $BM=4MK$ következik. 1 pont

Az FSM és BRM derékszögű háromszögekben $FMS\sphericalangle=BMR\sphericalangle$, mert csúcsszögek, ezért a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, vagyis a háromszögek hasonlók. Megfelelő oldalaik aránya az átfogók arányával megegyezik, ez pedig $\frac{FM}{BM}=\frac{FM}{4MK}=\frac{1}{2}$, hiszen $FM=2MK$. Ebből azt kapjuk, hogy $MR=2m$ és $BR=AS=2s$, de akkor $RE=s$ miatt $BE=CE=3s$, illetve $BC=6s$. 2 pont

Bebizonyítjuk, hogy az A, M, C pontok egy egyenesen vannak.

Felírjuk az AMS és CMR derékszögű háromszögekben az α és γ hegyesszögek tangensét.

Eszerint $\mathrm{tg}\alpha=\frac{MS}{AS}=\frac{m}{2s}$, illetve $\mathrm{tg}\gamma=\frac{MR}{CR}=\frac{2m}{4s}=\frac{m}{2s}$.

Ez csakis úgy lehetséges, ha az α és γ hegyesszögek egyenlő nagyságúak. Ekkor viszont $AS \parallel CR$, valamint $\alpha=\gamma$ miatt szükségképpen $AM \parallel CM$, ez pedig azt jelenti, hogy az AM és CM szakaszok tartóegyenese azonos, tehát az A, M, C pontok valóban egy egyenesen vannak. *2 pont

Ebből azonnal következik, hogy az A, M, G pontok is egy egyenesre esnek, vagyis AG az AEF háromszög harmadik súlyvonala, és így G az EF szakasz felezőpontja. 1 pont

Ennek megfelelően $\frac{EG}{FG}=\frac{1}{1}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *Ha ezt a megoldást választja a versenyző, de nem bizonyítja, hogy az A, M, C pontok egy egyenesen vannak, akkor a *2 pontot nem kapja meg.*

6. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza növekvő sorrendben $p+q$, $3pq-2$, $3pq-1$. Adja meg a háromszög oldalainak hosszát, ha p és q pozitív prímszámok.

Megoldás:

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $p \le q$.

A feltétel szerint a $3pq-1$ a derékszögű háromszög átfogója, a $p+q$ és a $3pq-2$ pedig a derékszögű háromszög befogóinak hossza. 1 pont

Felírjuk a Pitagorasz-tételt, amely alapján

$$(p+q)^2+(3pq-2)^2=(3pq-1)^2. \qquad \text{1 pont}$$

A műveleteket elvégezve

$$p^2+q^2+2pq+9p^2q^2-12pq+4=9p^2q^2-6pq+1,$$

ahonnan rendezés után azt kapjuk, hogy

$$p^2+q^2+3=4pq. \qquad \text{2 pont}$$

Nyilvánvaló, hogy az egyenlet jobb oldalán páros pozitív egész szám áll, ezért a bal oldalnak is páros pozitív egésznek kell lennie.

A p és q prímek nem lehetnek egyszerre párosak, vagy egyszerre páratlanok, mert akkor az egyenlet bal oldalán páratlan szám állna. Ez azt jelenti, hogy a p és q közül az egyik szám páros, a másik páratlan prím, és mivel $p \le q$, ezért $p = 2$. 2 pont

Behelyettesítve $p = 2$ értékét, a $q^2 - 8q + 7 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek két megoldása van: $q_1 = 1$ és $q_2 = 7$. 1 pont

Mivel $q_1 = 1$ nem prímszám, $q_2 = 7$ viszont prím, ezért csak $q_2 = 7$ a megoldás. 1 pont

Ekkor $p = 2$ és $q = 7$ miatt a derékszögű háromszög oldalainak hossza $p + q = 9$, $3pq - 2 = 40$, $3pq - 1 = 41$ egységnyi hosszúságúak. Nyilván ugyanezeket a hosszúságokat kapnánk, ha a $p = 7$ és $q = 2$ értékeket választottuk volna. 1 pont

Számítással ellenőrizhetjük, hogy $9^2 + 40^2 = 41^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a 9, 40, 41 számok valóban egy derékszögű háromszög oldalhosszai. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *A feladat feltételei között szerepelt az, hogy a derékszögű háromszög,* $p + q$, $3pq - 2$, $3pq - 1$ *oldalait növekvő sorrendben adtuk meg, vagyis az átfogó hossza* $3pq - 1$. *Ha nem tesszük fel, hogy* $p + q$, $3pq - 2$, $3pq - 1$ *növekvő sorrendben vannak felsorolva, a derékszögű háromszög átfogójának hossza akkor is csak* $3pq - 1$ *lehet. Nyilvánvaló ugyanis, hogy* $3pq - 1 > 3pq - 2$, *másrészt* $p + q < 3pq - 1$ *is teljesül, hiszen ebből ekvivalens átalakításokkal azt kapjuk, hogy* $p + q + 1 < 3pq$, *illetve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} < 3$. *Utóbbi egyenlőtlenség pedig egyszerűen belátható, mert* $p \ge 2$ *és* $q \ge 2$ *miatt* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} \le \frac{5}{4} < 3$.