



OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA  
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

**1. feladat**

Egy körben válasszunk ki véges sok húrt, és színezzük őket pirosra vagy kékre olyan módon, hogy a kör bármelyik pontjába ugyanannyi piros húr fusson be, mint kék. Legyen  $P$  a kör egy tetszőleges pontja, és tekintsük  $P$ -nek a hurok egyeneseitől mért távolságait. Bizonyítsuk be, hogy a pirosakhoz tartozó távolságok szorzata egyenlő a kékhez tartozók szorzatával.

**2. feladat**

James Bond, a 007-es ügynök feladata egy csupa különböző ötjegyű számból álló titkos lista megszerzése, amit el kell juttatnia M-hez (a számok sorrendje nem számít, a listán legalább 10 és legfeljebb 100 szám van). Gyanús azonban, hogy a futár ellenséges ügynök, ezért Bond megváltoztatja a lista egyik számát úgy, hogy továbbra is ötjegyű, és a többitől különböző legyen. Meg tud-e Bond és M állapotni előzetesen (a titkos lista ismerete nélkül) olyan módszerben, mellyel a megváltoztatott listából M rekonstruálni tudja az eredetit?

**3. feladat**

Tekintsük az összes olyan kétváltozós, egész együtthatós  $f(x, y)$  polinomot, amelyre  $f(x, y) = f(y, x)$  azonosság, továbbá  $f(m, n) = 0$  minden olyan  $m$  és  $n$  egészekre, melyekre  $0 \leq m, n \leq 2021$ . Az  $f(2022, 2022)$  értékek között mi a legkisebb pozitív, ha  $f$  befutja az összes ilyen polinomot?

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

