



OKTATÁSI HIVATAL

**A 2021/2022. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló**

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)

FELADATLAP

1. Hány olyan pozitív, tizenegyjegyű kettes számrendszerbeli szám van, amelyben nincs két egymás melletti 0 számjegy?
2. Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben egy négyzet $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;2)$, $D(0;2)$ csúcsai.

- a. Határozza meg az $ABCD$ négyzet síkjában azokat a P pontokat, amelyekre

$$PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2 = 2022.$$

- b. Milyen határok között mozog a $|PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2|$ kifejezés értéke, ha a P pont befutja az $ABCD$ négyzet körülírt körét? A négyzet körülírt körének mely P pontjai esetén veszi fel a $|PA^2 + PB^2 - PC^2 - PD^2|$ kifejezés a szélsőértékeit?

3. Legyenek a ; b ; c különböző, nem nulla valós számok, melyekre teljesül, hogy

$$a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a}.$$

- a. Ha $a = \sqrt{2}$, akkor határozza meg b és c pontos értékét.
- b. Feltéve, hogy léteznek az a ; b ; c különböző, nem nulla valós számok, melyekre teljesül $a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a}$, bizonyítsa be, hogy $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 8$.

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja.

