



OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA  
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

**1. feladat** Határozzuk meg az összes olyan prímszámot, amely előáll  $\left[\frac{n^2}{5}\right]$  alakban, ahol  $n$  pozitív egész számot jelöl.

(A feladat szövegében szereplő  $[y]$  jelölés az  $y$  valós szám alsó egészrésze, ami az  $y$ -nál nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.)

**2. feladat** Határozzuk meg a következő egyenlet összes valós megoldását:

$$4^{\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)} - 2x = 0.$$

**3. feladat** A hegyesszögű  $ABC$  háromszögben  $AB \neq CB$ , az  $AC$  oldal felezőpontja  $F$ . Legyen a  $B$ -ből induló magasságvonal talppontja az  $AC$  oldalon  $T$ , az  $A$  és  $C$  pontok merőleges vetülete a háromszög  $B$  csúcsából induló belső szögfelezőjének egyenesén pedig rendre  $P$  és  $Q$ .

(a) Bizonyítsuk be, hogy  $P$ ,  $Q$ ,  $F$  és  $T$  egy körön helyezkednek el.

(b) Legyen  $R$  az  $ABC$  köré írt kör sugara,  $r$  pedig a  $P$ ,  $Q$ ,  $F$  és  $T$  pontokat tartalmazó kör sugara. Határozzuk meg az  $ABC$  háromszög legnagyobb és legkisebb szögének arányát, ha  $ABC \sphericalangle = 72^\circ$  és  $R : r = 2 : 1$ .

**4. feladat** Milyen  $m$  egész esetén van olyan irracionális  $x$ , amire

$$x^{12} + mx, \quad x^3 + 2x^2 \quad \text{és} \quad x^2 + x$$

mindegyike egész.