OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. feladat

Egy valós együtthatós másodfokú polinom minden egész helyen páratlan egész értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy egész együtthatós?

2. feladat

Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a PAB, PBC, PCA szögek összege nagyobb a háromszög legkisebb szögénél.

3. feladat

Egy pozitív egész n számot *teljes hatványnak* hívunk, ha $n = a^b$ valamely $a \geq 1$, $b \geq 2$ egészekre. Nevezzük a pozitív egész n számot *majdnem teljes hatványnak*, ha n mindegyik p prímosztójára n/p teljes hatvány. Igaz-e, hogy minden pozitív egésznek létezik majdnem teljes hatvány többszöröse?

4. feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges x, y, z pozitív valós számokra

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

5. feladat

Van-e olyan tetraéder, amelyben a lapok köré írt körök középpontjai egy egyenesre illeszkednek?

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program