OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Az $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{3, 5\}$, $M_3 = \{7, 9, 11\}$ ... halmazokat úgy készítettük, hogy növekvő sorrendben vettük a pozitív egészek közül a páratlan számokat és az első halmazba tettünk egyet, a másodikba a következő kettőt és így tovább. Így az M_n halmaz elemei az n-nél kisebb indexű halmazokban nem szereplő számok közül a nagyság szerint soron következő n darab páratlan szám.

Határozzuk meg az M_{100} halmazban levő számok összegét.

2. feladat Panka és Noémi memória kártyajátékot játszanak. A kártyapakli 32 lapból áll, ezek között 16 féle található, mindegyik fajtából éppen kettő van. A lapokat összekeverve az asztalra helyezzük úgy, hogy mindegyiknek a hátlapja látható. A játékosok felváltva jönnek, a soron következő a kártyák közül kettőt megfordít egymás után. Ha párt talált, felveszi és megtartja őket, és újra ő következik. Ha nem párt talál, visszafordítja, és a társa következik. Feltételezzük, hogy a játékosok minden felfordított lapra emlékeznek és már ismert lapot csak akkor fordítanak meg, ha megtalálták a párját. A játék egy pillanatában már csak 8 lap maradt lenn az asztalon, és még egyik sem lett megfordítva. Ebből a helyzetből indulva válaszoljuk meg az alábbi két kérdést, melyek egymástól függetlenek:

(a) Mekkora az esélye, hogy a soron következő Panka begyűjti a megmaradt lapokat anélkül, hogy Noémi sorra kerülne?

(b) Mekkora az esélye, hogy a soron következő húzásnál Panka sem, majd utána Noémi sem talál párt?

3. feladat Az $ABCD$ négyzet BC oldala, mint átmérő fölé kört rajzolunk. A D pontból a körhöz húzott érintők érintési pontjai C és E. A négyzet AB oldalának és a DE érintő egyenesnek a metszéspontja legyen F. Az AB oldalnak és a CE egyenesnek a metszéspontja legyen G. Hányad része az EFG háromszög területe a négyzet területének?

4. feladat Tekintsük az 1,2,..., 10 számokat valamilyen sorrendben, jelölje őket $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Legyen $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $b_{10} = a_1 + a_2 + ... + a_{10}$.

Hányféle olyan $a_1, a_2, ..., a_{10}$ sorrend van, ahol a b_1, b_2, ..., b_{10} számok közül egyik sem osztható 3-mal?

5. feladat Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{x^{205} + x^{195}}{x^{201} + x^{199}} = \frac{205}{16}.$$

Mindegyik feladat helyes megoldása 7 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja