



OKTATÁSI HIVATAL

**A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló**

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)

FELADATLAP

1. Melyek azok az x, y valós számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenletrendszer?

$$\begin{cases} (x+y) \cdot (x^2 - y^2) = 400 \\ (x-y) \cdot (x^2 + y^2) = 232 \end{cases}$$

2. Legyen $f(x)$ a természetes számok halmazán értelmezett olyan függvény, amely eleget tesz az $f(x) + f(f(x)) = 12x + 40$ egyenletnek, és $f(21) = 71$. Feltéve, hogy a megadott tulajdonságokkal rendelkező függvény létezik, van-e olyan $x \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $f(x) = 2021$? (Válaszát számítással indokolja.)
3. Egy valós számokból álló számsorozat bármely két egymást követő tagjára teljesül, hogy $\frac{a_n + a_{n+1}}{2} = n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$) és $a_{221} = 2021$. Határozza meg a sorozat első 2021 tagjának összegét.
4. Egy baráti társaság e-maileken keresztül tartja a kapcsolatot egymással. Mindenkinek pontosan másik három társának az e-mailcíme van meg, és ez kölcsönös. Tudjuk, hogy bármelyik két ember közvetlenül tud egymásnak levelet küldeni, vagy létezik a társaságból olyan harmadik személy, akin keresztül tudnak levelet váltani. Sorolja fel a társaság létszámának lehetséges értékeit és szemléltesse az egyes eseteket egy-egy gráffal.
5. Legyen az ABC derékszögű háromszög $AB = c$ átfogójához tartozó magasságának talppontja D , a BCD és ADC háromszögekbe írható körök sugara rendre r_1 és r_2 , továbbá az ABC háromszög területe T . Bizonyítsa be, hogy

$$r_1 + r_2 + \sqrt{2T} \leq c.$$

Mekkorák a hegyesszögei annak a háromszögnek, amelyben az egyenlőség áll fenn?

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.