



OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. feladat

Mely $n \geq 0$ egészekre lesz $625^n + 4^{2n+1}$ prímszám?

2. feladat

Legyenek az ABC háromszög oldalai a szokásos betűzéssel a , b , c , és a C csúcshoz tartozó magassága m . Bizonyítsuk be, hogy ha a C csúcsnál levő szög legfeljebb derékszög, akkor

$$a + b > c + \frac{2}{3}m.$$

3. feladat

Egy egyszerű gráfban csúcsok egy halmazát függetlennek nevezzük, ha semelyik két eleme között nem fut él. Jelölje $F(G)$ a G egyszerű gráf csúcsai közül kiválasztható független részhalmazok számát. Adott n mellett az n csúcsú összefüggő gráfok közül melyikre lesz $F(G)$ maximális?

4. feladat

Egy valós számokból álló n elemű halmaz minden részhalmazára kiszámoltuk az elemek összegét. Legalább hányféle számot kaptunk? (Az üres halmaz elemeinek összegét 0-nak tekintjük.)

5. feladat

Határozzuk meg azokat az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x \neq y$ valós szám esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$