



OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem eleme az

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}$$

függvény értelmezési tartományának?

2. feladat Egy egységoldalú négyzet minden oldalán kiválasztunk egy-egy belső pontot; ezek egy konvex négyszög csúcsai, amelynek oldalai : a , b , c és d . Bizonyítsuk be, hogy

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4.$$

3. feladat A pozitív egész számok körében négy egymást követő páratlan szám négyzetének az összegét vizsgáljuk. Hány olyan számnégyes van, amelynél ez a négyzetösszeg 36-tal osztható, ha a négy egymást követő páratlan szám mindegyike kisebb 1000-nél?

4. feladat Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3^{2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

5. feladat Egy egység sugarú körbe írt $ABCD$ négyszög két szomszédos szöge 60° -os, illetve 90° -os. A négyszög tetszőleges P belső pontját az AB , BC , CD , DA oldalegyenesekre tükrözve rendre a K , L , M , N pontokat kapjuk.

- Határozzuk meg az $AKBLCMDN$ zárt töröttvonal hosszának a minimumát.
- Hol helyezkedik el a P pont a minimális hossz esetén?