Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Legyen X és Y egy-egy pont a derékszögű, O origójú koordinátarendszer x-, illetve y-tengelyének pozitív felén. Legyenek P, A és B olyan rácspontok az első síknegyed belsejében, amelyekre a PA félegyenes OX irányú, a PB félegyenes OY irányú, és $PA = PB$. Igazoljuk, hogy ha a PA félegyenesen van olyan A' rácspont, amelyre az AOP szög egyenlő az XOA' szöggel, akkor a PB félegyenesen is van olyan B' rácspont, amelyre a BOP szög egyenlő az YOB' szöggel.

2. Legyen a G véges gráf olyan fa, amelynek $n \geq 2$ csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy lehetséges a G gráf csúcsait 1-től n-ig úgy sorszámozni, hogy bármelyik csúcs esetében a szomszédai sorszámainak összege más maradékot adjon n-nel osztva, mint a szóban forgó csúcs sorszáma.

3. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ valós együtthatós polinomok, melyek főegyütthatója 1. Mutassuk meg, hogy ha az egész számokon felvett értékeik halmaza ugyanaz, akkor van olyan k egész szám, hogy vagy minden valós x-re $g(x) = f(x + k)$, vagy minden valós x-re $g(x) = f(-x + k)$.