Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Jelölje $d(n)$ az $n > 0$ egész szám pozitív osztóinak a számát. Tegyük fel, hogy $d(k)^2 = d(k^4)$. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas $j \geq 0$ egészre $d(k) = 3^j$.

2. A síkon egy szakasz kísérő sávjának nevezzük azt a két párhuzamos egyenes által határolt sávot (az egyeneseket is hozzáértve), amelynek a középvonalán fekszik a szakasz, és amelynek a szélessége egyenlő a szakasz hosszával. Bizonyítsuk be, hogy bármely síkbeli négyszöget lefedik a négy oldalszakaszához tartozó kísérő sávok.

3. A legalább másodfokú, valós együtthatós
$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$
polinomnak n darab valós gyöke van, amelyek mindegyike a $(0, 1)$ nyílt intervallumba esik. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-2} > 0$.

4. Legyen $p > 2$ prímszám. Hány olyan részhalmaza van a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaznak, amely elemeinek az összege osztható p-vel? (Az üres halmaz elemeinek összegét 0-nak tekintjük.)

5. Legyen A, B, C, D négy különböző pont a térben. Tegyük föl, hogy az AB, BC, CD és DA egyenesek érintenek egy gömböt az AB, BC, CD, DA szakaszok egy-egy belső pontjában. Bizonyítsuk be, hogy a négy érintési pont egy síkban van.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.