Oktatási Hivatal

A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. A hegyesszögű ABC háromszög A, illetve B csúcsából húzott magasságok talppontjai A_1, illetve B_1. Bizonyítsuk be, hogy
$$CA_1 \cdot AB_1 + CB_1 \cdot BA_1 = AB \cdot A_1B_1\,.$$

2. Keressük meg az összes nemnegatív egész számokból álló k, l, m számhármast, amelyre
$$13^k + 43^l = 2018^m\,.$$

3. Egy városban n tűzoltóállomás van. Bármelyik kettő közé építhetünk vízvezetéket. Percenként c liter víz szállítására képes vezeték építése bármely két állomás között c tallérba kerül. A polgármester olyan hálózat tervezésére írt ki pályázatot, hogy vészhelyzet esetén lehetséges legyen egy tetszőleges tűzoltóállomásból tetszőleges másikba percenként 1000 liter vizet szállítani. Mennyibe kerül a legolcsóbb ilyen tulajdonságú vízvezetékhálózat?

4. Egy háromszög határvonalán két pontot átellenesnek nevezünk, ha a határvonal mentén mért távolságuk éppen a kerület fele. Mutassuk meg, hogy bármely háromszögben van két átellenes pont, amelyek távolsága legfeljebb a kerület negyedével egyenlő.

5. Adott m-hez melyik az a legkisebb k egész szám, amelyre igaz a következő állítás:
Akárhogyan színezzük ki pirossal és kékkel az $1, 2, \ldots, k$ számokat, biztosan található olyan $1 \le a_1 < \ldots < a_m < b_1 < \ldots < b_m \le k$, hogy az a_i-k egyszínűek, a b_j-k is egyszínűek (de nem feltétlenül azonos színűek az a_i-kkel), és $b_m - b_1 \ge a_m - a_1$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.