Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Adott egy $P(x)$ egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha léteznek olyan a, b egészek, melyekre $|P(a)| = |P(b)| = 1$, továbbá $|a - b| \geq 3$, akkor a polinomnak nincs egész gyöke.

2. Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja M. Az AM és CM szakaszok mint átmérők fölé egy-egy kört rajzolunk. Tegyük fel, hogy az első kör az AB, illetve AD oldalt a P, illetve S belső pontban, a második kör pedig a CB, illetve CD oldalt a Q, illetve R belső pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS = BP \cdot CQ \cdot DR \cdot AS$.

3. Legyenek A, B és C pozitív egész számok, melyekre $A^2 + B^2 + C$ osztható AB-vel. Definiáljuk az a_n sorozatot az
$$a_1 = A, \qquad a_2 = B, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + C}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$
rekurzióval. Bizonyítsuk be, hogy a_n minden n-re egész szám.

4. Mutassuk meg, hogy bármely konvex hatszögben a kilenc darab átló hosszának összege nagyobb a kerület másfélszeresénél.

5. Legyen $n \geq 2$ egész, és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ legyenek páronként különböző számok. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} = 0\,.$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.