A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATOK

1. Az a_n számsorozat tagjaira teljesül, hogy $a_0 = 5$, és minden $n \geq 1$ pozitív egész számra

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{1 - a_{n-1}}.$$

Határozza meg az a_{2014} szám értékét!

2. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 17$, $BC = 8$. A P pont a CD oldalon, C-től m hosszúságegységre, a Q pont a CB oldalon, C-től n hosszúságegységre van.

Legyen R a P pontból az AB-re húzott merőlegesnek az AB oldalon levő talppontja, legyen továbbá $APR\angle = \alpha$, $QAB\angle = \beta$.

Határozza meg mindazokat a pozitív egészekből álló $m; n$ számpárokat, amelyekre $\alpha - \beta = 45°$!

3. Egy ABC háromszögben $AC = BC = a$ és $ACB\angle = 90°$. Az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja H.

Határozza meg az AB oldalon az E, a BC oldalon az F pontot úgy, hogy az EFH háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!
Adja meg ennek a minimális kerületnek a nagyságát és a $\frac{BF}{FC}$, illetve $\frac{BE}{EA}$ arányok pontos értékét!

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.