



OKTATÁSI HIVATAL

OKTV MATEMATIKA, III. KATEGÓRIA

2012-13-AS TANÉV, DÖNTŐ

1. Adott a síkon három különböző kör, k , k_1 és k_2 . Közepontjaik és sugaraik legyenek rendre O , O_1 , O_2 , r , r_1 és r_2 . Tegyük fel, hogy k belülről érinti k_1 -et az E_1 pontban, k_2 belülről érinti k -t az $E_2 \neq E_1$ pontban, továbbá hogy az O_1O_2 egyenes merőleges az E_1E_2 egyenesre. Fejezzük ki az r sugarat r_1 -gyel és r_2 -vel.

2. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^m \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)k}{m^{k+1}} = 1.$$

3. Tekintsük azokat az n hosszúságú sorozatokat, amelyek mindegyik eleme 0 vagy 1. Két ilyen sorozat összegén a tagonként modulo 2 végzett összeadás eredményét értjük. Mely pozitív egész n számokra állíthatók párba ezek a sorozatok úgy, hogy a párok két tagját rendre összeadva 2^{n-1} különböző sorozatot kapjunk?