



## Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/2013

### Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

#### II. forduló

1. Mely valós  $x; y$  számpárokra teljesül a

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4 \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$$

egyenlőség?

2. Mutassa meg, hogyha az

$$A = 224 \underbrace{99\dots9}_{k-2 \text{ db } 9} \underbrace{100\dots09}_{k \text{ db } 0} \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$$

tízestízes számrendszerbeli pozitív egész szám, akkor a

$$B = \sqrt{A} + 3$$

szám pozitív egész. Bizonyítsa be, hogy ez a  $B$  szám csak a 2; 3; 5 prímszámokkal osztható!

3. Legyen az  $ABC$  háromszögben a  $BC$  oldal felezőpontja  $F$ , legyen továbbá  $BCA\angle = 15^\circ$  és  $BFA\angle = 45^\circ$ .  
Határozza meg a  $CAB\angle$  nagyságát!

4. Meg lehet-e számozni egy kocka csúcsait az  $1, 2, \dots, 7, 8$  számokkal úgy, hogy minden csúcshoz különböző szám tartozzon, és bármelyik él két végpontjára írt számok összege is egymástól különböző legyen?

5. Bizonyítsa be, hogy ha  $\alpha$  hegyesszög, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \geq 3 + 2 \cdot \sqrt{2}$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Minden feladat megoldásának pontos leírásáért 10 pont adható.