Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/2013

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

1. (iskolai) forduló

1. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $n+1$-nek pedig pontosan három.

   Hány pozitív osztója van az $n+2012$ számnak?

2. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 53 legyen? Lehet-e a 11 pont által meghatározott egyenesek száma 54? Állítását indokolja!

3. Oldja meg a pozitív egész számokból álló számhármasok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

   (a) $x+y+z=12$,

   (b) $xy+xz+yz=47$.

4. A nem egyenlőszárú ABC háromszögben $BC>CA$. Az AB oldal F felezőpontján keresztül húzzunk párhuzamost a C pontbeli belső szögfelezővel, ez az egyenes az AC egyenest a P, a BC egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy
$$\frac{BC}{AC}-\frac{PQ}{QF}=1!$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán a
$$\frac{\sqrt{2012-503x}-|3x-2|}{\sqrt{2x+12}-|3x-2|}\le 1$$
egyenlőtlenséget!

6. Az x és y pozitív valós számok szorzata 50, továbbá teljesül, hogy $x>y$. Határozza meg az $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ kifejezés minimumának értékét!

   Adja meg az $\frac{x}{y}$ aránynak azt az értékét, amelyre a kifejezés a minimumát valóban felveszi!

Minden feladat megoldásának pontos leírásáért 10 pont adható.