Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2011–2012-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Döntő, a gimnáziumok speciális matematikai osztályai részére

Fontos tudnivalók:

1. A dolgozaton **nem szabad feltüntetni a versenyző nevét**. A kidolgozás során felhasznált minden papírlapra írja fel a tanuló a **számjelét**.
2. A feladatok megoldására fordítható idő: **5 (öt) óra**. A feladatok megoldásához bármely tárgyi segédeszköz (szakkönyv, példatár, zsebszámológép stb.) szabadon használható (kivéve, ha a feladat szövege megtiltja pl. számítógép használatát). Egyébként azonban **önállóan kell dolgozniuk** a versenyzőknek (és telefon, internet stb. sem használható). Programozható zsebszámológép igénybevétele esetén mind a feladat megoldását szolgáltató programot, mind pedig magát a megoldást meg kell adni.
3. Ha a versenyző valamelyik feladat megoldásában olyan ismeretre támaszkodik, amely nem szerepel a kategóriájának matematika törzsanyagában, akkor *pontosan* hivatkoznia kell arra a forrásra, ahonnan azt merítette. A versenybizottság csak kellően megindokolt megoldásokat fogad el, **az eredmény puszta közlése nem értékelhető**. Nem fogadható el könyvből, példatárból stb. olyan feladatra történő hivatkozás sem, amely feladatnak a megoldása ott nincs kidolgozva.
4. A dolgozathoz **nem szükséges fogalmazványt** (piszkozatot) **készíteni**, de törekedni kell a megoldások világos, szabatos megfogalmazására és áttekinthető, olvasható leírására. A **feladatokat tetszés szerinti sorrendben** lehet megoldani, lehetőleg feladatonként új oldalon. Valamely feladatra adott második megoldás nem pótolja egy másik feladat hiányzó megoldását.
5. A dolgozatok elbírálásának megkönnyítése céljából kérjük a versenyzőket, hogy minden darab papírt adjanak be, amelyen érdemleges munkát végeztek. A verseny feladatait tartalmazó feladatlapot a versenyzők megtarthatják.
6. Azokat a versenyzőket, akiknek dolgozatából kétségtelenül megállapítható együttműködésük, **kizárjuk a versenyből**.

Budapest, 2012. február — A versenybizottság

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2011–2012-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Legyen $n \geq 3$. Az n tagot számláló Hazugok Klubjában mindenkit megkérdezünk, hány olyan tagja van a klubnak (saját magán kívül), aki vele azonos évben született. A klubtagok mind hamis adatokat akarnak közölni úgy, hogy valamilyen sorrendben a $0, 1, \ldots, n-1$ válaszokat adják meg. A tényleges születési évszámokról mi csak annyit tudunk, hogy nem mind különbözők, de nem is mind azonosak. Milyen n értékekre lehetünk biztosak abban, hogy a klubtagok el tudják érni a céljukat?

2. Legyen B az AC szakasz belső pontja. Rajzoljuk meg a k_1 és a k_2 félkört az AB, illetve az AC szakaszra mint átmérőre ugyanabban a félsíkban. A BC szakaszra mint alapra állítsunk olyan BCD egyenlő szárú háromszöget, amelynek a D csúcsa k_2-re illeszkedik. Legyen K annak a körnek a középpontja, amely érinti k_1-et, k_2-t és a BD szakaszt. Igazoljuk, hogy KB merőleges AC-re.

3. Legyen $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ a pozitív prímszámok sorozata és

$$f(k,n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor n\sqrt{p_k/p_j} \right\rfloor.$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely $M > 0$ egészhez pontosan egy olyan (k,n) pozitív egész számpár létezik, amelyre $f(k,n) = M$.

(A képletben $\lfloor x \rfloor$ az x szám alsó egészrészét, $\sum$ pedig a megadott indexekre történő összegzést jelenti, tehát pl. $f(2,1) = \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/2} \rfloor + {}$ $+ \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/3} \rfloor = 2$ (az összeg többi tagja 0).)