



## Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011/2012 Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

### 1. (iskolai) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$$

egyenletet!

2. Egy számsorozatot a következő módon képezünk: legyen

$$a_1 = 1 \text{ és } a_2 = 2,$$

a sorozat további tagjai pedig tegyenek eleget az

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} - 1 \quad (n \geq 2)$$

összefüggésnek.

Mennyi a sorozat első 2011 tagjának az összege?

3. Legyenek  $m$  és  $n$  pozitív egész számok. Igazolja, hogy

$$\frac{m}{n} < \frac{m^2 + m \cdot n + 2n^2}{m^2 + m \cdot n + n^2}$$

akkor és csak akkor igaz, ha  $\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$ !

4. Egy  $R$  sugarú körbe olyan trapézt írunk, amelynek oldalai  $R; R; R; 2R$  hosszúságú húrok.

Az  $R$  hosszúságú alaphoz tartozó rövidebb ív  $F$  felezőpontjából párhuzamosokat húzunk a trapéz száraival, ezek a kört másodszer a  $G$  illetve a  $H$  pontokban metszik.

Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe egyenlő az  $FGH$  háromszög területével!

5. Legyenek az  $a, b, c, d$  számok egymástól és 0-tól különböző számjegyek.

Adja meg a lehető legkevesebb számú osztóval rendelkező, tízes számrendszerbeli,  $N = \overline{abcd} + \overline{dabc} + \overline{cdab} + \overline{bcda}$  alakú számok közül a legnagyobbat!

6. Tegyük egy hagyományos óra minden számjegyére egy-egy korongot, tehát az 1-re egy darabot, a 2-re is egy darabot, és így tovább, végül a 12-re is egy darabot. Ezután egy lépés a következőt jelenti: megfogunk két tetszőleges korongot, és az egyiket az óramutató járásával ellentétes irányban, a másikat pedig az óramutató járásával azonos irányban a szomszédjára áttesszük. Elérhetjük-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mind a 12 korong ugyanazon a számjegyén legyen?

Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont adható.