Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2010/2011

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

2. forduló

1. **Öt pozitív egész szám egy számtani sorozat első öt eleme. A sorozatnak a különbsége prímszám. Tudjuk, hogy az első négy szám köbének összege megegyezik az ezen öt tag közül vett páros sorszámú tagok összegének a 150-szeresével. Továbbá azt is tudjuk, hogy az utolsó négy tag köbének összege az öt tag közül vett páratlan sorszámú tagok összegének a 224-szerese. Adja meg ezt az öt számot!**

2. **Adott egy kör, amelynek egyenlete** $x^2+y^2-10x-10y+45=0$.
   - **a) Bizonyítsa be, hogy a kör minden pontja az első koordináta-negyedbe esik!**
   - **b) Legyenek a körön levő** P **pontok koordinátái** x **és** y. **Képezzük a** P **pontok koordinátáiból a** $k=\frac{y}{x}$ **hányadosokat! Mennyi** k **maximuma és a kör melyik pontjában veszi ezt föl?**

3. **Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!**

$$2x+3y+|x+y-2|=5\,,$$
$$x^2+4xy+4y^2=5x+11y-7\,.$$

4. **Adottak a** $k_1;k_2;k_3$ **egymást páronként kívülről érintő körök. Az érintési pontjaik legyenek:** $P=k_1\cap k_3$, $Q=k_1\cap k_2$ **és** $R=k_2\cap k_3$. **A** PQ **egyenes** k_2 **körrel való másik metszéspontja** A **és** k_3**-mal** C. **Az** AR **egyenes a** k_3 **kört**
   B**-ben is metszi.**
   Bizonyítsa be, hogy az ABC **háromszög derékszögű!**

5. **Igazolja, hogy ha** $a>0$, $b>0$ **valós számok és** $a\neq b$, **akkor:**

   a)
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}\,;$$

   b) továbbá, hogy az
$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010}>\frac{1}{10}$$
   egyenlőtlenség teljesül!

Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont adható.