



Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2008–2009-es tanév

**MATEMATIKA, III. kategória**

Döntő, a gimnáziumok speciális matematikai osztályai részére

**Fontos tudnivalók:**

1. A dolgozaton **nem szabad feltüntetni a versenyző nevét**. A kidolgozás során felhasznált minden papírlapra írja fel a tanuló a **számjelét**.
2. A feladatok megoldására fordítható idő: **5 (öt) óra**. A feladatok megoldásához bármely tárgyi segédeszköz (szakkönyv, példatár, zseb-számológép stb.) szabadon használható (kivéve, ha a feladat szövege megtiltja pl. számítógép használatát). Egyébként azonban **önállóan kell dolgozniuk** a versenyzőknek (és telefon, internet stb. sem használható). Programozható zsebszámológép igénybevétele esetén mind a feladat megoldását szolgáló programot, mind pedig magát a megoldást meg kell adni.
3. Ha a versenyző valamelyik feladat megoldásában olyan ismeretre támaszkodik, amely nem szerepel a kategóriájának matematika törzsanyagában, akkor *pontosan* hivatkozni kell arra a forrásra, ahonnan azt merítette. A versenybizottság csak kellően megindokolt megoldásokat fogad el, **az eredmény puszta közlése nem értékelhető**. Nem fogadható el könyvből, példatárból stb. olyan feladatra történő hivatkozás sem, amely feladatnak a megoldása ott nincs kidolgozva.
4. A dolgozathoz **nem szükséges fogalmazványt** (piszkozatot) **készíteni**, de törekedni kell a megoldások világos, szabatos megfogalmazására és áttekinthető, olvasható leírására. A **feladatokat tetszés szerinti sorrendben** lehet megoldani, lehetőleg feladatonként új oldalon. Valamely feladatra adott második megoldás nem pótolja egy másik feladat hiányzó megoldását.
5. A dolgozatok elbírálásának megkönnyítése céljából kérjük a versenyzőket, hogy minden darab papírt adjanak be, amelyen érdemleges munkát végeztek. A verseny feladatait tartalmazó feladatlapot a versenyzők megtarthatják.
6. Azokat a versenyzőket, akiknek dolgozatából kétségtelenül megállapítható együttműködésük, **kizárjuk a versenyből**.

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2008–2009-es tanév  
**MATEMATIKA, III. kategória**  
A döntő feladatai  
a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Mutassuk meg, hogy ha  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$$

közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív  $c_1, c_2, \dots$  számok esetén  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$  azt jelenti, hogy az  $s_k = c_1 + c_2 + \dots + c_k$  összegek  $k$  növekedésével minden határon túl nőnek.)

2. Vetítsük az  $ABCD$  szabályos tetraédert merőlegesen egy a térben fekvő számegyenesre, és legyenek a csúcsok vetületei rendre az  $a, b, c, d$  valós számok. Fejezzük ki a tetraéder élhosszát  $a, b, c$  és  $d$  segítségével.
3. Egy nap egy méhraj egy különlegesen szép fa virágjairól gyűjtötte a mézet. Minden méhecske legfeljebb 100-szor látogatott el a fához, két-tőnél többen sohasem voltak egyszerre ott, de bármelyik két méhecske találkozott valamikor egymással a fánál. Maximálisan hány méhecskéből állhatott a méhraj?