Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg azon $k_1, k_2, ..., k_n$ és n pozitív egészeket, amelyekre

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = 5n - 4 \quad \text{és} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n} = 1.$$

2. A szabályos ABC háromszög belső P pontjának az AB, BC és CA oldalakra eső merőleges vetülete legyen rendre C', A' és B' . Jelölje az APC', BPA', CPB' és APB', BPC', CPA' háromszögekbe írt körök sugarát rendre r_1, r_2, r_3 és r_4, r_5, r_6. Bizonyítsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6.$$

3. A $H = \{1; 2; 3; ...; 9\}$ halmaz egy P *partíciójának* nevezzük azt, ha H-t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az n-t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a P : $\{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$ partíció esetén $P(6) = 5$.

Bizonyítsuk be, hogy H bármely P_1 és P_2 partíciójára található két különböző H-beli n és m elem, amelyekre $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.