



Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008/2009

Matematika I. kategória

A 3. (döntő) forduló feladatai

1. Egy háromszög oldalai a következők:

$$AB = \sqrt{x^2 - 1} \cdot (x^n + x^{n-1} + x^{n-2}),$$

$$BC = x^{n+1} + x^n + x^{n-1}$$

és

$$CA = x^n + x^{n-1} + x^{n-2},$$

ahol $x > 1$ valós szám és $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$.

- Bizonyítsa be, hogy a háromszög derékszögű!
- Határozza meg az x valós szám értékét úgy, hogy a háromszög legkisebb szögének nagysága 30° legyen!

2. Legyen tetszőleges x valós szám esetén

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2} !$$

- a) Határozza meg az

$$f(x) + f(y)$$

összeget, ha x és y olyan valós számok, amelyek összege 1!

- b) Határozza meg az

$$f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \dots + f\left(\frac{2009}{2010}\right)$$

összeg pontos értékét!

3. Adja meg az összes olyan háromszöget, amelynek oldalai közvetlen egymás után következő páros egész számok, valamint az egyik belső szöge kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik belső szöge!

Minden feladat hibátlan megoldásáért 10 pont adható.

Az elérhető maximális pontszám 30 pont.