Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2007–2008-as tanév

MATEMATIKA, III. kategória

A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Az $A_1A_2 \dots A_6$ konvex hatszög mindegyik belső szöge tompaszög. Az A_i középpontú k_i körök $(1 \le i \le 6)$ úgy helyezkednek el, hogy k_1 kívülről érinti k_2-t és k_6-ot, k_2 kívülről érinti k_1-et és k_3-at, általában k_i kívülről érinti k_{i-1}-et és k_{i+1}-et. A k_1-en található két érintési pontot összekötő egyenesnek és a k_3-on található érintési pontokat összekötő egyenesnek a metszéspontját összekötjük A_2-vel, ez lesz az e egyenes. Hasonlóan, a k_3-on, illetve k_5-ön levő érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját összekötjük A_4-gyel, ez lesz az f egyenes. Végül, a k_5-ön, illetve k_1-en található érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját összekötjük A_6-tal, ez lesz a g egyenes. Mutassuk meg, hogy e, f es g egy ponton mennek át.

2. Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

3. Mutassuk meg, hogy minden $1 < r < s < 2008/2007$ számokhoz vannak olyan (nem feltétlenül relatív prím) p és q pozitív egészek, hogy $r < p/q < s$, és sem a p, sem a q tízes számrendszerbeli felírásában nem szerepel a 0 számjegy.