



Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2007-2008. tanévi első fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\log_2(1 + \cos(2x)) = 2^{1+\cos(3x)}.$$

2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F , az AB oldal egy belső pontja T , az AF és CT szakaszok metszéspontja M . Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora lehet az ABC háromszög területe?

3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy egy olyan téglalap alapú gúlában, amelyben a gúla magasságának a talppontja az alap valamely csúcsába esik, a leghosszabb oldalél hosszának negyedik hatványa legalább hatszorosa az oldallapok területei négyzetösszegének.

5. Adott az

$$x \mapsto \frac{2x+1}{2} - \sqrt{x^2+x}$$

függvény, ahol $x \geq 0$.

(a) Monoton nő, vagy csökken a függvény?

(b) Melyik az a legkisebb pozitív egész n , amelyre $f(n) < \frac{1}{2008}$?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.