A döntő feladatai

1. Melyek azok az $(a;b;c)$ rendezett valós számhármasok, amelyekre ha az a, b, c bármelyikét kivonjuk a másik kettő szorzatából, úgy 2007-et kapunk?

2. Adott egy parabola és síkjában a P külső pontból húzott két érintő, rajtuk az A illetve B érintési ponttal. A parabola az ABP háromszöget egy X területű konvex és egy Y területű konkáv részre osztja. Igazoljuk, hogy az $X : Y$ arány nem függ a külső P pont megválasztásától.

3. Egy négyzetet oldalaival párhuzamos egyenesekkel 16 egybevágó négyzetre bontunk. Ezeket a négyzeteket pirosra vagy kékre színezhetjük a következő módon: egyszerre egy 2×2-es vagy 3×3-as (az oldalakkal párhuzamos) négyzet 4 illetve 9 négyzetének színeit változtathatjuk ellenkezőre. Kezdetben mind a 16 négyzet piros.

(a) Az előbbi lépések egymásutáni alkalmazásaival elérhető-e, hogy a felső sor balról második négyzete kék, a többi 15 négyzet piros legyen?

(b) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 2^{12} féle színezés lehetséges. A forgatással és/vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket is különbözőknek tekintjük.

Valamennyi feladat helyes megoldása 7 pontot ér.