OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

GIMNÁZIUM

A 2004–2005. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának feladatai matematikából, a II. kategória számára

1. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (x, y, z valós számok):

(1) $$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10,$$

(2) $$x^2-y^2-z^2=476,$$

(3) $$2^{(\lg|y|-\lg z)}=1.$$

2. feladat

Az ABC háromszög BC oldalán van a B_1 és C_1, AB oldalán a B_2, AC oldalán a C_2 pont. B_1B_2 párhuzamos AC-vel, C_1C_2 párhuzamos AB-vel. A B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek metszéspontja D. Jelölje a BB_1B_2 és CC_1C_2 háromszögek területét T_B és T_C.

a) Igazoljuk, hogy ha $T_B=T_C$, akkor az ABC háromszög súlypontja rajta van az AD egyenesen.

b) Határozzuk meg $\dfrac{T_B}{T_C}$ értékét, ha D az ABC háromszög beírt körének középpontja és $AB=4$, $BC=5$, $CA=6$.

3. feladat

Egy szabályos ötszög csúcsaiba egy-egy valós számot írtunk, majd az ötszög oldalaira és átlóira felírtuk a végpontoknál levő számok összegét.

Bizonyítsuk be, hogy ha az utóbbi 10 számból 7 egész, akkor mindegyik egész kell legyen.

4. feladat

Okos Ottó felsorolta az n természetes szám pozitív osztóit nagyság szerinti sorrendben. Elsőként az 1-et, majd sorban egymás után, végül nyolcadikként következett az n. A hatodikként felsorolt d osztóról tudjuk, hogy $20\le d\le 25$. Mi lehetett n?