Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2004–2005-ös tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $ABCD$ húrnégyszögben
$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}\,.$$

2. Hány $0<x<2004$-re teljesül $x+\lfloor x^2\rfloor=x^2+\lfloor x\rfloor$? $\big($Itt $\lfloor c\rfloor$ a c valós szám (alsó) egészrészét jelöli, azaz a legnagyobb olyan k egész számot, amelyre $k\le c$.$\big)$

3. Nevezzünk három, nem feltétlenül különböző, 1-nél nagyobb egészt barátságos számhármasnak, ha bármely kettő önmagánál kisebb pozitív osztóinak az összege a harmadik szám. Határozzuk meg az összes olyan barátságos számhármast, amelyben a(z egyik) legnagyobb szám páros.

4. Tekintsük a pozitív egészek olyan, k (különböző) elemből álló A részhalmazát, amelyre ha két (nem feltétlenül különböző) pozitív egész egyike sem eleme A-nak, akkor az összegük sincs A-ban. Maximálisan mennyi lehet az A elemeinek az összege?

5. Tekintsünk egy négyoldalú gúlát, amelynek az alapja húrnégyszög. Vetítsük a gúla magasságának talppontját merőlegesen a gúla négy oldalélére. Bizonyítsuk be, hogy a négy vetület egy körön van.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.