ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. május 9.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$B \setminus A = \{c; d; f\}$	2 pont	*Egy hiba (hiányzó vagy hibás elem) esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$(10 \cdot 9 \cdot 8 =)$ 720-féle szereposztás lehetséges.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
$\left(\frac{308\,000}{275\,000} = 1{,}12\right)$ Zita fizetését 12%-kal emelték.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4. **első megoldás**		
$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\mathbf{c}$	1 pont	
$\overrightarrow{FG} = (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} =)\ \frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. **második megoldás**		
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$	1 pont	
A háromszög FG középvonala párhuzamos a BC oldallal, és fele olyan hosszú.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
($\overrightarrow{FG}$ és $\overrightarrow{BC}$ azonos irányú, ezért) $\overrightarrow{FG} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{2}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.		
A megadott öt pozitív szám mediánja 3,	1 pont	*Egy lehetséges megoldás:* 1, 2, 3, 7, 8.
terjedelme 7.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

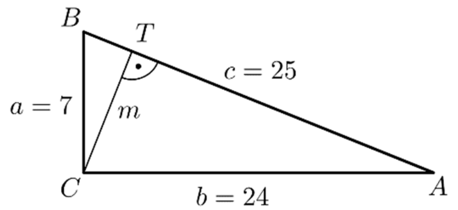
6.		
$(32 + 8 + 2 + 1 =)$ 43	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

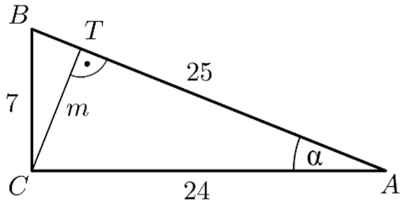
7.		
$\log_2(2x) = \log_2 2 + \log_2 x =$	1 pont	$x = 32$
$(= 1 + 5) = 6$	1 pont	$\log_2 64 = 6$
Összesen:	**2 pont**	

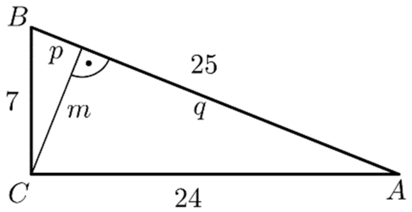
8.		
–3; –2; –1; 0; 1; 2	2 pont	*Egy hiányzó vagy hibás érték esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A $-4 < x \le 2$ *válasz 1 pontot ér.*

9.		
$\left(\binom{16}{2} =\right)$ 120-féleképpen	2 pont	*A* $\binom{16}{2}$ *válasz 1 pontot ér.*
Összesen:	**2 pont**	

10. **első megoldás**		
 A kérdéses magasság hosszát *m*-mel jelölve, a háromszög területét kétféleképpen felírva: $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m}{2}$.	2 pont	*Legyen a kérdéses magasság talppontja T. Ekkor a BCT és a BAC háromszögek hasonlók. Így a megfelelő oldalak aránya egyenlő:* $\frac{a}{c} = \frac{m}{b}$.
Ebből $m = \frac{7 \cdot 24}{25} =$	1 pont	
$= 6{,}72.$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

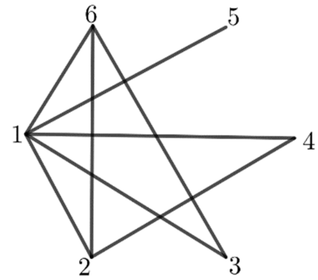
10. második megoldás		
 Az ABC derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{7}{25}$. ($\alpha \approx 16{,}26°$)	2 pont	
Az ACT derékszögű háromszögben $m = 24 \cdot \sin\alpha =$	1 pont	
$= 6{,}72$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

10. harmadik megoldás		
 Az ábra jelöléseivel a befogótétel alapján: $7 = \sqrt{p \cdot 25}$,	1 pont	
amiből $p = 1{,}96$.	1 pont	
$q = 25 - 1{,}96 = 23{,}04$	1 pont	
A magasságtétel alkalmazásával: $m = \sqrt{pq} = \sqrt{1{,}96 \cdot 23{,}04} = 6{,}72$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

11.		
a) Például $\mathbf{n}(5; -1)$.	1 pont	
b) $5x - y = 13$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
Minimumának értéke (–2): *f*, *h*	2 pont	*Egy jó, vagy két jó és egy rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Legalább két zérushelye van: *g*, *h*	2 pont	*Egy jó, vagy két jó és egy rossz válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a)		
	3 pont	*Minden hiányzó vagy hibásan berajzolt él esetén 1 pont (összesen legfeljebb 3 pont) levonás jár.*
Összesen:	**3 pont**	

13. b)		
I. állítás: igaz,	1 pont	
például a 6-nak 4 pozitív osztója van: 1, 2, 3, 6.	1 pont	
II. állítás: hamis,	1 pont	
egy ellenpélda a 4 és a 6 (mert a 4 nem osztója a 6-nak, de a 4 és a 6 nem relatív prímek.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c)		
Az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számok közül csak az 5 nem osztója a 24-nek (tehát 5 kedvező eset van).	1 pont	
A B esemény szempontjából $5 \cdot 5$ kedvező eset van,	1 pont	
és $6 \cdot 6$ az összes eset száma.	1 pont	
$P(A)=\frac{5}{6}$ és $P(B)=\frac{25}{36}$.	1 pont	
Az A esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
Norbi és Emma négy mérésének átlaga: $\frac{1{,}9+2{,}0+1{,}8+2{,}3}{4}=2$ (m/s^2).	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást számológéppel helyesen számolja ki.*
A négy mérés szórása: $\sqrt{\frac{(1{,}9-2)^2+(2{,}0-2)^2+(1{,}8-2)^2+(2{,}3-2)^2}{4}}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}187$ (m/s^2).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
Norbi és Emma négy mérési eredményének összege 8.	1 pont	
A többi 20 mérés eredményének összege $20\cdot 1{,}9=38$.	1 pont	
A 24 mérés átlaga: $\frac{8+38}{24}\approx$	1 pont	
$\approx 1{,}92$ (m/s^2) a kért kerekítéssel.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
A golyó talajtól való távolsága 0,5 másodperc múlva: $h(0{,}5)=6\cdot 0{,}5-5\cdot 0{,}5^2=$	1 pont	
$=1{,}75$ (méter).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

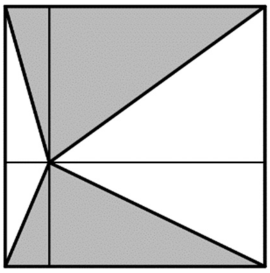
14. d)		
Megoldandó a $6t-5t^2=1$ egyenlet.	1 pont	
A másodfokú egyenlet megoldásai: $t=0{,}2$ és $t=1$. Tehát a fellövéstől számítva 0,2, illetve 1 másodperc elteltével lesz a golyó 1 méter magasságban.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

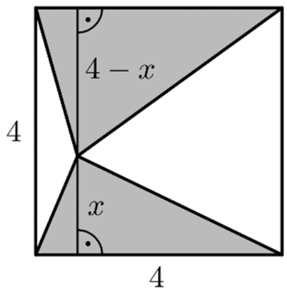
15. a)		
A beszínezett derékszögű háromszög egyik befogójának hossza 4 cm, a befogó és az átfogó által bezárt szög pedig 30°.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A másik befogó hossza $4\cdot \mathrm{tg}\,30° = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}31$ cm.	2 pont	*Az átfogó hossza* $\frac{4}{\cos 30°} \approx 4{,}62$ cm.
A háromszög területe $T = \frac{4\cdot 2{,}31}{2} = 4{,}62\ \text{cm}^2$.	1 pont	$T = \frac{4\cdot 4{,}62\cdot \sin 30°}{2}$
Összesen:	**4 pont**	

15. b) első megoldás		
Az egyik háromszöget színezzük például kékre. Ekkor a mellette lévő két háromszöget vagy két ugyanolyan színnel (sárga-sárga, zöld-zöld), vagy két különbözővel színezhetjük ki (sárga-zöld, zöld-sárga).	1 pont	
Mind a négy esetben csak egyféleképpen (rendre: zöld, sárga, kék, kék) színezhetjük ki a negyedik háromszöget.	1 pont	
Az első háromszöget három különböző színnel színezhetjük ki.	1 pont	
Így összesen $4\cdot 3 = 12$-féleképpen színezhető ki a négyzet a feltételeknek megfelelően.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. b) második megoldás		
A színezés után pontosan két azonos színű háromszögnek kell lennie, melyek csak csúcsukkal érintkeznek.	1 pont	
Ezek elhelyezkedése kétféle lehet, színe pedig háromféle.	1 pont	
A másik két háromszöget a maradék két színnel kétféleképpen színezhetjük.	1 pont	
Így összesen $2\cdot 3\cdot 2 = 12$-féleképpen színezhető ki a négyzet a feltételeknek megfelelően.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó rendszerezett módon felsorolja a lehetséges színezéseket, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.
2. Ha a vizsgázó megoldásában azt a 6 esetet is figyelembe veszi, amikor a színezéshez nem használja fel mindhárom színt, akkor megoldására legfeljebb 2 pontot kapjon.

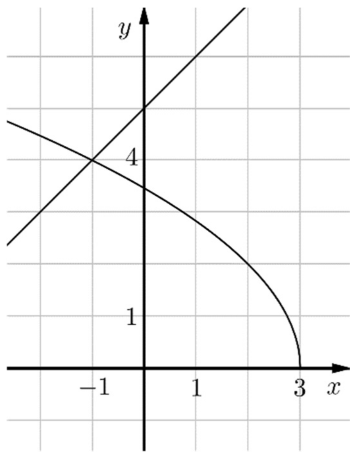
15. c) **első megoldás**		
A megadott ponton át húzzunk párhuzamos szakaszokat a négyzet oldalaival. 	1 pont	
A kapott négy téglalap mindegyikének a területét felezi a behúzott átló,	2 pont	
így a két beszínezett háromszög területének összege valóban egyenlő a másik két háromszög területének összegével.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c) **második megoldás**		
Legyen az egyik beszínezett háromszögnek a 4 cm-es oldalához tartozó magassága x (cm), ekkor a másik beszínezett háromszögnek a 4 cm-es oldalához tartozó magassága $4 - x$ (cm).	1 pont	
A beszínezett terület: $\frac{4 \cdot x}{2} + \frac{4 \cdot (4-x)}{2} = \frac{4x + 16 - 4x}{2} = 8\ \text{cm}^2$,	2 pont	
ami a 4 cm oldalú négyzet területének a fele, így a két beszínezett háromszög területének összege valóban egyenlő a másik két háromszög területének összegével.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a szürke háromszögek magasságának konkrét számértéket adva számol, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

II. B

16. a) **első megoldás**		
Az egyenletet négyzetre emelve: $4 \cdot (3 - x) = x^2 + 10x + 25$.	2 pont	
Nullára rendezve: $x^2 + 14x + 13 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $x = -1$ és $x = -13$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $x = -13$ nem megoldása,	1 pont	*(A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt)* $-5 \le x \le 3$,
$x = -1$ megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	*ezen az intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért $x = -1$ megoldás, $x = -13$ nem megoldás.*
Összesen:	**6 pont**	

16. a) **második megoldás**		
Az $x \mapsto 2 \cdot \sqrt{3-x}$ $(x \le 3)$ függvény grafikonjának ábrázolása,	3 pont	
és az $x \mapsto x + 5$ függvény grafikonjának ábrázolása közös koordináta-rendszerben.	1 pont	
Az ábráról leolvasva: $x = -1$ lehet az egyetlen megoldás.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $2 \cdot \sqrt{3-(-1)} = 4$ és $-1 + 5 = 4$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. b)		
$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=2$	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az egyenlet mindkét oldalát helyesen szorozza meg* (x^2-1)*-gyel.*
$x^2-x+x^2=2x^2-2$	1 pont	
$x=2$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	$\lvert x\rvert\neq 1$ *esetén ekvivalens átalakításokat végeztünk.*
Összesen:	**5 pont**	

16. c) első megoldás		
Ha egy sorozat első hat tagjának összege egyenlő a sorozat első hét tagjának összegével, akkor a sorozat hetedik tagja 0.	2 pont	$\frac{2\cdot 18+5d}{2}\cdot 6=$ $=\frac{2\cdot 18+6d}{2}\cdot 7$
A sorozat különbségét d-vel jelölve: $18+6d=0$,	1 pont	$108+15d=126+21d$
azaz $d=-3$.	1 pont	
A sorozat első tizenhárom tagjának összege $S_{13}=\frac{2\cdot 18+12\cdot(-3)}{2}\cdot 13=0$ valóban.	1 pont	
$a_{13}=18+12\cdot(-3)=-18$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó abból kiindulva (de nem bizonyítva), hogy $S_{13}=0$*, megmutatja, hogy* $a_{13}=-18$*, akkor erre 2 pontot kapjon.*

16. c) második megoldás		
Ha egy sorozat első hat tagjának összege egyenlő a sorozat első hét tagjának összegével, akkor a sorozat hetedik tagja 0.	2 pont	
A számtani sorozat tulajdonsága miatt $a_7=0=\frac{a_6+a_8}{2}=\frac{a_5+a_9}{2}=...=\frac{a_1+a_{13}}{2}$,	1 pont	
azaz $a_6=-a_8$, $a_5=-a_9$, …, $a_1=-a_{13}$.	1 pont	
Így $S_{13}=a_1+a_2+...+a_{12}+a_{13}=0$ valóban.	1 pont	
Mivel $a_1=-a_{13}$, így $a_{13}=-18$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. a)		
Az éves termelési értékek olyan mértani sorozatot alkotnak, amelynek hányadosa 1,05,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
első tagja pedig $500 \cdot 1{,}05 = 525$ (millió Ft).	1 pont	
A sorozat első 20 tagjának összege: $S_{20} = 525 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1} \approx$	1 pont	
$\approx$ 17 360 (millió Ft).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó észszerű és helyes kerekítésekkel felsorolja a sorozat tagjait, majd ezek alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

17. b)		
(A 2018 utáni n-edik évben az A üzem éves termelési értéke $500 \cdot 1{,}05^n$, a B üzemé $400 \cdot 1{,}06^n$.) A táblázat helyes kitöltése:	3 pont	
A termelési értékek közötti különbség az adott években: 525 – 424 = 101, 551,3 – 449,4 = 101,9 és 578,8 – 476,4 = 102,4 (millió Ft).	2 pont	
A két üzem termelési értéke közötti különbség (a vizsgált időszakban) növekszik, a kijelentés tehát valóban nem igaz.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

	2018	2019	2020	2021
A üzem (millió Ft)	500	**525**	**551,3**	**578,8**
B üzem (millió Ft)	400	**424**	**449,4**	**476,4**

17. c)		
(Jelölje n a 2018 után eltelt évek számát.) Megoldandó az $500 \cdot 1{,}05^n = 400 \cdot 1{,}06^n$ egyenlet.	1 pont	
Rendezve: $1{,}25 \cdot 1{,}05^n = 1{,}06^n$.	1 pont	
Az egyenletet $1{,}05^n$-nel osztva: $1{,}25 = \left(\frac{1{,}06}{1{,}05}\right)^n \approx 1{,}0095^n$.	1 pont	$\lg 1{,}25 + n \cdot \lg 1{,}05 =$ $= n \cdot \lg 1{,}06$
Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve és rendezve: $n = \frac{\lg 1{,}25}{\lg 1{,}0095} \approx$	2 pont	$n = \frac{\lg 1{,}25}{\lg 1{,}06 - \lg 1{,}05} \approx$
$\approx 23{,}6$.	1 pont	$\approx 23{,}5$
A 2018 utáni 24. évben, azaz 2042-ben lesz igaz, hogy a B üzem termelési értéke utoléri az A üzemét.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó észszerű és helyes kerekítésekkel felsorolja a sorozatok tagjait, majd ezek alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.
2. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséget old meg, és ebből helyes következtetéseket von le, akkor a teljes pontszám jár.

18. a)		
Egy szabályos hatszög felbontható hat darab egybevágó szabályos háromszögre, melyek magassága $5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A hatszög területe: $T = 6 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ($\approx 64{,}95$ cm^2).	2 pont	
A doboz térfogata: $V_{\text{doboz}} = 6 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 3$ (≈ 195 cm^3).	1 pont	
Egy gömb sugara 1,4 cm,	1 pont	
így a gömbök össztérfogata: $V_{\text{gömbök}} = 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot 1{,}4^3 \cdot \pi$ (≈ 69 cm^3).	1 pont	
A hat csokigömb térfogata a doboz térfogatának a $\frac{69}{195} \cdot 100 \approx 35{,}4$ százalékát tölti ki.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. b)		
Legalább öt aranyszínű gömb akkor lesz a dobozban, ha közülük öt vagy hat aranyszínű.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak valószínűsége, hogy hat aranyszínű gömb kerül a dobozba: $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0{,}088$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy pontosan öt aranyszínű gömb kerül egy dobozba (a binomiális eloszlás képletét használva): $\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{3}\approx 0{,}263$.	2 pont	
A kérdezett valószínűség ezek összege, azaz körülbelül 0,351.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c) első megoldás		
A keletkező forgástest két egybevágó csonkakúpból áll, melyek (FC átmérőjű) alapköre illeszkedik egymásra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A csonkakúp fedőkörének sugara 2,5 cm, területe $2{,}5^2\cdot\pi = 6{,}25\pi$ (≈ 19,63 cm^2).	1 pont	
A csonkakúp alkotója és az alapkör sugara egyaránt 5 cm, így a palást területe $(5+2{,}5)\cdot 5\cdot\pi = 37{,}5\pi$ (≈ 117,8 cm^2).	2 pont	
A keletkező forgástest felszíne: $A = 2\cdot 6{,}25\pi + 2\cdot 37{,}5\pi = 87{,}5\pi \approx 274{,}9$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c) második megoldás		
A keletkező forgástest két egybevágó csonkakúpból áll, melyek (FC átmérőjű) alapköre illeszkedik egymásra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A két csonkakúp alapkörének sugara 5 cm, fedőkörének sugara 2,5 cm, alkotója 5 cm, felszínük összege: $2\cdot\left[5^2+2{,}5^2+(5+2{,}5)\cdot 5\right]\cdot\pi =$	1 pont	
$= 137{,}5\pi$ (≈ 431,97 cm^2).	1 pont	
Ebből le kell vonni a két alapkör területét, ami $2\cdot 5^2\cdot\pi = 50\pi$ (≈ 157,1 cm^2).	1 pont	
A keletkező forgástest felszíne így: $A = 137{,}5\pi - 50\pi = 87{,}5\pi \approx 274{,}9$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	